

INSTITUTIONEN FÖR BYGGNADSTEKNIK
TEKNISKA HÖGSKOLAN I LUND

DEPARTMENT OF BUILDING TECHNOLOGY
LUND INSTITUTE OF TECHNOLOGY



DIMENSIONERING AV BETONGKONSTRUKTIONER ENLIGT SANNOLIKHETSTEORETISKA METODER

DESIGN OF CONCRETE STRUCTURES WITH
PROBABILISTIC METHODS

TRYGGVE DEGERMAN

CODEN: LUTVDG/(TVBK-1003)/1-359/(1981)

DIMENSIONERING AV
BETONGKONSTRUKTIONER ENLIGT
SANNOLIKHETSTEORETISKA
METODER

DESIGN OF CONCRETE STRUCTURES WITH
PROBABILISTIC METHODS

TRYGGVE DEGERMAN

AVDELNINGEN FÖR BYGGNADSTEKNIK II
BOX 725
S-220 07 LUND



Printed in Sweden
Studentlitteratur
Lund 1981

FÖRORD

Föreliggande arbete har till stor del finansierats av Statens Råd för Byggnadsforskning genom anslaget 750078-5 och utförts vid Institutionen för Byggnadsteknik, avd för Byggnadsteknik II, Lunds Tekniska Högskola. Projektet behandlar dimensionering av konstruktioner med hjälp av sannolikheteoretiska metoder och består dels av en litteraturinventering rörande säkerhetssystem, dels egen arbetsinsats som behandlar de speciella frågeställningar som uppkommer vid dimensionering av betongkonstruktioner. Huvuddelen av kap 1 - 3 är därvid att hänföra till sammanställning av i litteraturen redovisade erfarenheter, medan kap 4 - 7 i stort behandlar resultat av egen insats.

Professor Lars Östlund har gett mig många värdefulla synpunkter på materialet och inspirerat mig till fortsatt arbete. Jag är skyldig honom ett stort tack.

Jag vill också framföra ett tack till Gun-Britt Rijpma, Lars Sentler, Sture Akerlund och Per Öfverbeck, vilka ställt upp under arbetets gång.

Stora insatser har även presterats av Ingbritt Larsson, som ritat figurer och textat formler, samt av Clary Persson, som renskrivet manuskriptet. Tack!

Lund i april 1981

Tryggve Degerman



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553201_0017

SUMMARY

The use of probabilistic methods in construction design has progressed in recent years and various methods have been suggested by researchers. The applications of probabilities to engineering mechanics and structural reliability is not a straight forward matter. Many attempts have been done to overcome the difficulties associated with the probabilistic models. Lack of appropriate data such as probability density functions for the strength and load variables is a current problem when formulating the reliability based criteria. Often the models governing the reliability measure require a normal distribution assumption while the actual variables may fit to some other distribution. The selection of safety levels is another fundamental problem of structural engineering because it reflects the accountability as well as the economy of the structure.

The main purpose of this work has been to give a presentation of some of the problems associated with the use of probability theory in structural engineering and in particular to make it possible to perform a probabilistic design of simple concrete structures. The report contains a description of different safety systems, systems with partial safety factors and systems with prescribed safety indices (chapter 3).

Examples of how safe areas for a concrete cross section can be calculated are shown in chapter 4. Some numerical calculations with assumptions of normal distributed strength illustrates the use of probability theory. Also a comparison between safety systems is shown for a specific design situation. Chapter 5 deals with the collection of data for concrete as well as for reinforcement. The compressive strength of concrete given with its average value and the standard deviation is obtained from the consecutive material tests performed at the Swedish concrete factories. Test results during a period of 10 years corresponding to about 800 000 tested specimens are the basis of evaluation of the statistical parameters for the compressive strength.

Other concrete parameters such as tensile strength and elasticity of modulus are calculated with approximate methods as functions of the compressive strength. The strength of reinforcement bars is calculated from test results at Swedish steel factories as well as from control authorities. As for concrete the mean and standard deviation are given for different qualities. The test material is illustrated in histograms in appendix B and C.

Safety systems are generally adapted to continuous unlimited distributions. Chapter 6 deals with the situation when information about a governing parameter is of a kind that the corresponding distribution can be considered truncated. Appendix F describes a situation when both the strength and the load variable are equally truncated and how this affects the measure of reliability. Also in chapter 6 there is a method described how to handle the situation if only the strength variable is truncated and the design point falls outside the truncation point for the strength variable.

Chapter 7 finally contains a discussion concerning demands and difficulties when trying to choose appropriate safety levels. Examples of calibration are shown, both for concrete and steel structures which illustrates how the reliability index can differ depending on the actual loading when comparing to a current code.

BETECKNINGAR

R	bärförmåga
S	lasteffekt
ϵ , p_f	skaderisk
P (*)	sannolikheten för (*)
f	frekvens
f_X	frekvensfunktion för stokastiska variabeln X
F_X	fördelningsfunktion för stokastiska variabeln X
G	egentyngd
P	nyttolast
$\bar{X}$, m_X	medelvärde av stokastiska variabeln X
σ_X , s_X	standardavvikelse för stokastiska variabeln X
V (X)	variansen för stokastiska variabeln X
ϕ	normalfördelningens fördelningsfunktion
n, k	antal standardavvikelser
Δ	relativt fel, överlappslängd
δ	variationskoefficient
α	$\bar{P}/\bar{G}$ (kvot mellan nyttolastens och egentyngdens medelvärden)
α'	fraktilvärde
ρ	korrelationskoefficient
β	säkerhetsindex
γ	partialkoefficient
α_i	vikt för aktuell standardavvikelse σ_i
M	materialparameter
L	dimensionsparameter
M_u	brottmoment
N_u	normalkraft vid brott
f_s	sträckgräns för stål
f_{cc}	betonghållfasthet
R (τ)	kovariansfunktion för τ
θ	kvot mellan bärförmågans och lasteffektens medelvärden (centrala säkerhetsfaktorn)
$f_{c, konst}$	betongtryckhållfasthet i färdig konstruktion
f_{ct}	draghållfasthet hos betong
f_c	prismahållfasthet

INNEHÅLLSFÖRTECKNING

1	INLEDNING	Sid 1
2	ÖVERSIKT ÖVER SÄKERHETSPROBLEMET	5
2.1	Allmänt	5
2.2	Ingående faktorer och deras sammanhang	7
2.3	Laster	10
2.4	Mått- och hållfasthetsvärden	32
2.5	Krav	33
3	VERIFIKATIONSMETODER	37
3.1	Allmänt	37
3.2	Mer generella metoder	51
4	BÄRFÖRMÅGA	75
4.1	Begreppet bärförmåga	75
4.2	Sammansättning av hållfasthets- och måttparametrar till bärförmåga	75
4.3	Ofta förekommande typer av samband	80
4.4	Invariansproblem	110
5	HÅLLFASTHETSDATA	113
5.1	Hållfasthetsvärdenas karaktär	113
5.2	Betongkonstruktioner	115
5.2.1	Hållfasthetsdata för betong	116
5.2.1.1	Tryckhållfasthet hos betong	142
5.2.1.2	Draghållfasthet hos betong	144
5.2.1.3	Elasticitetsmodul hos betong	146
5.2.2	Hållfasthetsdata för armering	151
6	FÖREKOMST OCH BETYDELSE AV GRÄNSER FÖR BASPARAMETRAS VÄRDEN	157
6.1	Allmänt om begränsningar hos värden	157
6.1.1	Laster	164
6.1.2	Mått	166

	Sid
6.1.3 Hållfasthetsvärden	166
6.2 Trunkerade fördelningar	167
6.3 Inverkan av trunkering på beräknad skaderisk	169
6.4 Fördelningar av funktioner av trunkerade fördelningar	181
6.4.1 Fördelningen för en produkt av trunkerade normalfördelade variabler	182
6.4.2 Fördelningen för en summa av trunkerade normalfördelade variabler.	198
6.5 Fiktiva värden på säkerhetsindex	206
7 KRAV	
7.1 Antagande och formulering av krav	215
7.2 Möjligheter till precisering av krav	220
7.3 Exempel på kalibrering	222
7.3.1 Betongkonstruktioner	222
7.3.2 Stålkonstruktioner	224
7.4 Kravets beroende av konsekvens av brott	226
REFERENSER	232
Bilaga A Approximativ beräkning av brottrisk vid trunkerade frekvensfunktioner	
B Sammanställning av betongdata	
C Sammanställning av armeringsdata	
D Beräkningsexempel för kalibrering av partialkoefficienter	
E Teori för test av låga värden på kubhållfasthet hos betong	
F Samband mellan säkerhetsindex β och centrala säkerhetsfaktorn θ vid trunkerade fördelningar	
G Beräkningsexempel på kalibrering	

1 INLEDNING

Dimensionering av byggnadskonstruktioner beskrives vanligen som en kontrollprocess där effekt av antagen last, normlasten skall vara mindre än förväntad resistans dvs normenlig bärförmåga. Metoden benämnes deterministisk metod, inte för att den är en renodlad sådan utan för att den utgör motpol till på senare år framtagna metoder, som mer eller mindre bygger på sannolikheteoretiska beräkningsmetoder.

Vid angivandet av storleken hos deterministiska värden användes vanligen någon form av statistisk betraktelse. Materialhållfastheten t ex anges i de flesta fall med hänsynstagande till värdenas spridning vilket medför att de deterministiskt valda värdena snarare utgör ett slags karakteristiskt värde, ibland med, ibland utan något bakomliggande fördelningsantagande.

På liknande sätt kan hållfasthetsreducerande koefficienter i en deterministisk metod hänföras till en slags partialkoefficient vilka förekommer i beräkningsmetoder baserade på statistisk grund. Ett exempel på dylika koefficienter är den slankhetsberoende koefficient som reducerar hållfastheten hos trä belastat på så sätt att risk för knäckning föreligger. Hänsyn till brotttyp av spröd karaktär har tagits på sätt som till stor del påminner om de faktorer som ligger till grund för partialkoefficienters värden. En deterministisk och en sannolikheteoretisk metod typ partialkoefficientmetod tycks likna varandra i den huvudsakliga uppbyggnaden. Vad är då att vinna med ett nytt system? Svaret kan ges i form av en uppställning av mer systematiserad natur där de respektive dimensioneringsmetodernas egenskaper klassificeras med avseende på för- och nackdelar. Kryssmärkta rutor innebär "för- del" i uppställningen.

	Deterministisk	Sannolighetsteoretisk
Rättvis		x
Kostnadskrävande		x
Verklighetstrogen		x
Enkel	x	
Utvecklingsmöjligheter		x

Egenskapsklassificeringen kräver en kommentar.

Med rättvis menas här den egenskapen att metoden ska ge "lika säkra" konstruktioner oberoende av var de byggs eller vilket material som ingår. Endast funktionen ska avgöra säkerhetsmåtets storlek. Exempelvis ska en industihall i Kiruna byggd i stål kunna göras lika säker som en dylik i betong byggd i Skåne. Den deterministiska metoden har inte de möjligheter att ta hänsyn till variationer i material- och lastdata som den sannolighetsteoretiska har.

Omdömet fördel för egenskapen kostnadskrävande får ses som en bedömning av ett tillstånd som gäller efter så lång tid att stationära förhållanden råder dvs de förhållandevis dyra omställningskostnader som uppstår vid byte av dimensioneringssystem ska inte påverka totalkostnaden. Då gäller att de besparingar som göres i och med att konstruktioner endast göres så "säkra som behövs" medför fördel för de statistiska metoderna.

Begreppet verklighetstrogen är medtaget endast med tanke på beräkningsmodeller. Deterministiska modeller arbetar så gott som alltid med normvärden beräknade som en kvantil ur mätresultat. Statistiska metoder däremot arbetar nästan uteslutande med medelvärden och standardavvikelser vilket ger ett bättre grepp om storleksnivån hos de i beräkningsmodellen ingående variablerna. Den statistiska metoden arbetar dessutom oftast i brottstadiet hos konstruktionen eftersom det är sannolikheten för brott som är intressant. Vissa konstruktioner t ex armerad betong har

beräkningsmodeller som i brottstadiet är mer verklighetsliknande än motsvarande modell i ett stadium bestämt av tillåtna påkänningar. En modell som bättre beskriver verkligheten bidrar naturligtvis till en lägre total spridning och bestämmandet av säkerhetsnivån kan ske med större precision.

Skillnaden i enkelhet mellan de två metoderna framgår genast om man betänker att statistik och statistiska beräkningar först på senare år blivit infört som läroämne på gymnasieskolor. För de flesta årskullar ingenjörer är statistikbesläktad hantering okända och ibland också oönskade begrepp. Därför kommer den sannolikhets-teoretiska metoden att framstå som den mest komplicerade av de två metoderna, åtminstone i ett inledningsskede. I gengäld finns dock möjligheten till utveckling och förändring av metoden i takt med ökande kunskapsnivå.

Utveckling av sannolikheteoretiska beräkningsmetoder har gått från de allra enklaste till mer och mer avancerade allteftersom kunskap och behov har ökat. En dylik metod i sin allra enklaste form beskrivs av högst två stokastiska variabler vars fördelningar är sådana att den simultana fördelningen för variablerna är en standardfördelning. Statistiska studier av hållfasthet för garn och tråd gjordes redan på 1920-talet och följdes av flera arbeten som behandlade hållfasthet hos byggnadskomponenter. I och med Arne Johnssons arbete på 50-talet introducerades grundprinciper för skaderiskens koppling till byggnadens ekonomi. 1964 utformade American Concrete Institute ett program där utveckling av nya dimensioneringsmetoder premierades.

Ungefär samtidigt publicerade CEB rekommendationer där metoder, som bättre beskrev olika faktorerers inverkan på konstruktioners bärförmåga, förordades. Dessa deklARATIONER ledde i slutet av sextiotalet fram till de första statistiska metoderna, samtliga av den enkla typ som beskrevs ovan. Dessa metoder hade, förutom att de var specialfall för ett fåtal fördelningar, den nackdelen att de inte var invarianta i vissa avseenden. Vid beräkning av

en spännarmerad betongkonstruktion t ex, fick man olika resultat om man ansåg kabelkraften vara en yttre last eller tillhöra bär-förmågan hos tvärsnittet. Invarianta metoder utvecklades i början av sjuttio-talet men av dessa var endast ett fåtal praktiskt användbara dvs dimensioneringsprocessen kunde genomföras med rimlig arbetsinsats.

Ett av kraven som ställts på ett fungerande statistiskt system är att dator ej ska behöva tillgripas i fler fall än de behöver idag dvs i de fall iteration krävs ska konvergensen vara så god att endast ett fåtal steg behöver göras.

Sammanfattningsvis kan sägas att utvecklingen av de statistiska beräkningsmetoderna nu nått så långt att systemen är användbara i dimensioneringsprocessen. Återstår gör framtagandet av de parametervärden som den statistiska dimensioneringsprocessen kräver samt anpassningen av systemet till verkliga förhållanden varvid speciellt skillnaderna mellan modell och verklighet måste utredas och beaktas. Den utredning som här presenteras är ett bidrag till att göra statistisk dimensionering möjlig för armerade betongkonstruktioner.

2 ÖVERSIKT ÖVER SÄKERHETSPROBLEMET

2.1 Allmänt

Utvecklingen av byggnadsnormer, skrivna som muntliga, har varit synnerligen ojämn genom tidevarven. Redan tidigt presterades, med nuvarande mått mätt, mycket avancerade konstruktioner av vilka många är helt eller delvis bevarade än idag. I och med raserandet av kulturer, typ Romarriket, gick emellertid värdefull kunskap om byggande förlorad och nya uppväxande kulturer fick utveckla nya byggmetoder vilka från början var mycket grova. Genom inträffade ras av byggnadskonstruktioner skedde inläring och uppbyggnad av erfarenheter. Trots att skrivkonsten var känd redan på Hammurabis tid, ca 4000 år sedan, så finns inget bevarat material från den tiden rörande byggnaders konstruktion och säkerhet. Byggmästare som begick fel underkastades straff i proportion till skadekonsekvens, vilket omöjliggjorde en uppfattning om byggnaders säkerhet. Statsöverhuvuden av senare tid försökte behärska säkerhetsmarginalerna genom att lagstifta om erforderliga och maximala mått och dimensioner. Exempelvis begränsades höjden på romarnas tegelhus och det föreskrevs att den sista bågen i en rad valvkonstruktioner skulle ha grövre dimensioner än de övriga. Galileo gjorde omfattande arbeten på området material och hållfasthet men kände inte till lagen om krafter i jämvikt. Det dröjde till 1773, då Coulomb presenterade sin korrekta analys av böjpåkänningar, innan möjligheten att beräkna en konstruktions säkerhet öppnade sig. Coulomb benämnes ibland, tack vare sitt arbete, byggnadsstatikens grundare. Under sjuttonhundratalet förekom, om inte byggnorm, så ändå litteraturverk som behandlade speciella problem. Ett av dessa är Belidors verk "La Science des Ingenieurs" som bl a gav upplysningar om lämpliga balkdimensioner.

Begrepp som tillåten böjpåkänning nämndes först av Navier i början av artonhundratalet i samband med att konstruktionsmaterialens egenskaper och uppförande blev närmare utrett. Metoder att beräkna påkänningar i fackverk dokumenterades i litteraturen i mitten av århundra-

det och ungefär samtidigt infördes begreppet säkerhetsfaktor där denna relaterades till brottlaster. Mot slutet av århundradet fanns tabeller tillgängliga där lämplig säkerhetsfaktor angavs. Redan nu skilde man på egenvikt och nyttolast i det avseendet att de tilldelades olika säkerhetsfaktorer. Nedanstående uppställning ger exempel på dylika säkerhetsfaktorer som rekommenderades i England resp USA (Randall, 1973).

TAB 2-1. Säkerhetsfaktorer från England på artonhundratalet.

	Egenvikt	Nyttolast
Perfekt material och arbetsutförande	2	4
Normalt bra material och arbetsutförande		
i metall	3	6
i trä	4 - 5	8 - 10
i tegel	4	8

TAB 2-2. Säkerhetsfaktorer från USA på artonhundratalet.

Material	Konstant last	Variabel last	Stötlast
Trä	8	10	15
Tegel och sten	15	25	30
Gjutjärn	6	15	20
Smidesjärn	4	6	10
Stål	5	7	15

Från att ha varit krav och rekommendationer uppställda av enskilda institutioner eller byggherrar utvecklades praxis till byggnorm. Systemet med säkerhetsfaktorer och tillåtna påkänningar bibehölls trots att man redan 1912 betvivlade sambandet mellan tillåtna påkänningar och säkerhetsfaktorer. Systemet som sådant var emellertid ekonomiskt försvarbart vid den tiden, det finns även de som påstår att det också är det än idag.

2.2 Ingående faktorer och deras sammanhang

De grundfaktorer som reglerar storleken på beräknad skaderisk är i princip desamma som avgör om kravet på tillåten påkänning är uppfyllt. Skillnaden är att man med den statistiska metoden mer systematiskt tar hänsyn till de bestämmande faktorernas variationer samt hur dessa påverkar den slutliga bärförmågens och lasteffektens variation.

I FIG 2-1 visas ett principiellt schema över den statistiska dimensioneringsprocessen.

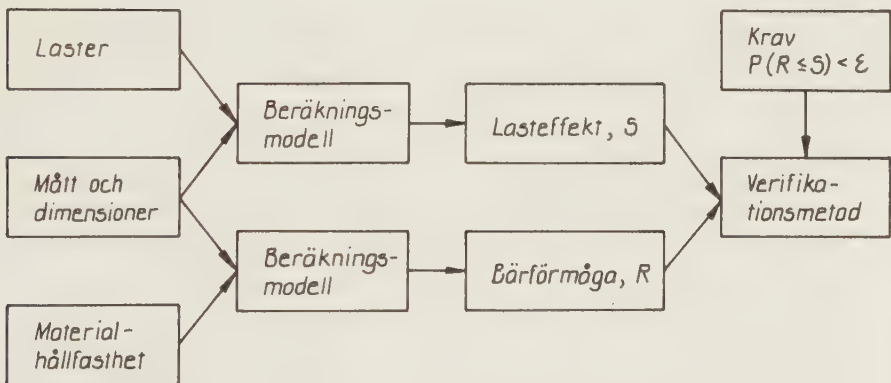


FIG 2-1. Schematisk illustration av dimensioneringsprocessen.

De tre första boxarna till vänster är att betrakta som stokastiska variabler. Förutsättningar om materialbeteende, geometri, jämviktsekvationer etc överför dessa variabler till nya stokastiska variabler, lasteffekt och bärförmåga. Dessa nya variablers frekvensfunktioner används därefter för att beräkna mått på det uppställda kravet att sannolikheten att bärförmågan är mindre än eller lika med lasteffekten ska vara mindre än ett på förhand givet värde.

I de fall kännedom om de ursprungliga variablernas fördelningar föreligger kan de nya erhållas genom matematiska transformationer varefter erforderliga parametervärden, som ska användas i verifikationsmetoden, kan beräknas på vanligt sätt. Ett exempel som beskriver metodiken är följande;

Sökt: Fördelningen för mittmomentet i en fritt upplagd balk, belastad med jämn fördelad last vars intensitet antas vara rektangelfördelad i intervallet $\bar{q} \pm q_0/2$. Balkens teoretiska spännvidd antas också vara rektangelfördelad med medelvärde $\bar{L}$ och standardavvikelsen $L_0/\sqrt{12}$ samt oberoende av lastintensiteten.

Den simultana frekvensfunktionen för lastintensiteten q och spännvidden L erhålles då som

$$f_{q,L}(x,y) = \frac{1}{q_0} \cdot \frac{1}{L_0} \quad (2-1)$$

dvs produkten av de två frekvensfunktionerna. Göres transformationen

$$\left. \begin{aligned} u &= x & x &> 0 \\ v &= \frac{xy^2}{8} & y &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-2)$$

erhålles motsvarande funktionaldeterminant till

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{4}{u} \sqrt{\frac{\delta v}{u}} & \frac{4}{\sqrt{\delta v u}} \end{vmatrix} = \frac{4}{\sqrt{\delta u v}} \quad (2-3)$$

och den simultana frekvensfunktionen för U och V erhålles till

$$f_{U,V}(u, v) = \frac{1}{q_0} \cdot \frac{1}{L_0} \frac{4}{\sqrt{\delta u v}} \quad (2-4)$$

Marginalfördelningen för V är nu fördelningen för det sökta mittmomentet och erhålles genom att integrera ut U ur den simultana frekvensfunktionen. Göres detta erhålles

$$f_V(v) = \int_{\bar{q} - \frac{q_0}{2}}^{\bar{q} + \frac{q_0}{2}} \frac{1}{q_0 L_0} \frac{4}{\sqrt{\delta v}} \frac{1}{\sqrt{u}} du \quad (2-5)$$

vilket ger

$$f_V(v) = \frac{8}{L_0 \sqrt{\delta v u}} \quad (2-6)$$

Härur kan medelvärde och standardavvikelse beräknas på vanligt sätt. De valda fördelningarna för variablerna är föga realistiska men avsikten är endast att beskriva tillvägagångssättet för att erhålla fördelningen för i detta fall lasteffekten. I de fall integrationerna inte kan utföras analytiskt kan numerisk integration tillgripas. Normalt förhåller det sig så att förhållandevis enkla problemlösningar kräver en numerisk behandling då de analytiska uttrycken utom för vissa specialfall, blir för komplicerade och svårhanterliga. Emellertid står det klart att om grunddata finns tillgängligt i tillräcklig omfattning så finns framkomliga vägar i någon form, analytiska eller numeriska, att erhålla mått på storheter som i konstruktionssam-

manhang är intressanta t ex en byggnads tillförlitlighet. Följande avsnitt behandlar de grunddata och de krav som är nödvändiga för att göra den statistiska dimensioneringsmetoden genomförbar.

2.3 Laster

Undantaget de sista årtiondena har kunskapen om laster baserade på systematiska undersökningar varit ytterst bristfälliga. I de fall någon form av lastundersökning förekommit har dessa inriktats på att finna eller uppskatta de högsta värden som laster kan nå. Först i och med införandet av statistiska metoder har lastundersökningar kunnat planeras på så sätt att uppgifter nyttiga för modelluppbyggnader har erhållits. Laster har beroende på sin karaktär och relativa frekvens uppdelats och klassificerats i typer för att möjliggöra en bättre och mer ingående beskrivning av verkligheten. Dagens byggnormer visar också hur hänsyn tagits till nämnda faktorer.

Total last, som påverkar en konstruktion eller konstruktionsdel utgöres normalt av en kombination av flera dellaster. Dellasterna kan indelas i två huvudgrupper, last av egentygnd samt last av nyttig last. Kvoten nyttig last/egentygnd kan variera mellan värden nära 0 och värden i närheten av 10 vilket kan erhållas med höga lätta stålbalkar. För betong hamnar kvotens storlek i närheten av 1 eller mindre.

I dimensioneringssammanhang är det nödvändigt att känna till storleken på lasten. För själva dimensioneringen är inte lasten den direkt intressanta utan istället lasteffekten t ex moment, tvärkraft. I fortsättningen kommer uttrycket last att förstås som lasteffekt, dvs lasten är omräknad till lasteffekt för att direkt kunna jämföras med bärförmågan i betraktat snitt. Om den totala lasten skrives som

$$G + P$$

där G betecknar effekt orsakad av egentyngd och

P betecknar effekt orsakad av nyttig last

kan dimensioneringsförhållandet skrivas

$$G + P < R$$

där R är aktuell bärförmåga i betraktat snitt.

Utseendet påminner om deterministiska uttryck från nuvarande normer. Om G , P och R är stokastiska variabler med kända fördelningar kan dimensioneringsuttrycket ge ytterligare en information nämligen sannolikheten för skada vilket kan skrivas

$$P(G + P \geq R) = \varepsilon \quad (2-7)$$

där $P()$ betecknar sannolikheten för $()$ och

ε betecknar erhållen skaderisk.

Vanligtvis är förfarandet vid dimensionering något annorlunda. En vald accepterad brottrisk ligger till grund för att, med kända uppgifter om ingående variablers variationer och fördelningar, beräkna erforderligt medelvärde hos bärförmågan. Metodiken vid dimensionering kommer att framgå genom exempel längre fram.

En förutsättning för dimensionering är, som tidigare nämnts, kännedom om ingående variablers fördelningar. Önskvärt vore att kunna representera såväl total last som bärförmåga i enkla analytiska modeller. Med enkla avses här att modellernas matematiska uttryck skall vara sådana att skaderisken skall kunna integreras fram analytiskt utan hjälp av t ex datorer. Som framgår av texten längre fram är den enkla modellrepresentationen närmast ouppnåelig. Simulering eller numeriska beräkningar är de medel som just nu finns att tillgå undantaget de specialfall då alla fördelningar är normalfördelade eller har ur praktisk synpunkt ointressanta fördelningsformer t ex rektangelfördelning.

Laster indelar i grupper med avseende på variation i tid och rum. Enligt internationell nomenklatur sker gruppering av laster med hänsyn till tid i permanenta laster, variabla laster och olycks-
laster. Till permanenta laster hänförs sådana laster vars variation med tiden är ringa eller ingen. Till variabla laster hör övriga normalt förekommande laster och till olyckslaster hänförs laster som inte kan anses tillhöra de två tidigare nämnda typerna, som inträffar sällan och då i samband med händelse som är att betrakta som olyckshändelse. Till tidsinverkan räknas även lasters varaktighet vilken kan vara av betydelse vid beräkning av deformationer vid krypning samt vid bedömning av inverkan av lastkombinationer.

Vad lasters variation i rummet beträffar så finns olika sätt att ta hänsyn till detta. För bjälklagslast exempelvis används en jämnt fördelad last så vald att den ger ungefär samma inverkan som verklig last som är oregelbundet placerad. I angivelsen för lastens storlek finns även medtaget att den verkliga lasten kan koncentreras på ett för konstruktionen ogynnsamt sätt. Består konstruktionen av flera delar eller fack måste lastens slumpmässiga storlek och fördelning ytterligare beaktas t ex genom att bestämma farligaste lastställning.

Ett annat sätt att ta hänsyn till verklig lastfördelning är användning av formfaktorer. Snö- och vindlast är exempel på laster där en dylik representation används. Det vanligaste exemplet på permanent last är tveklöst egentyngden hos en konstruktion.

Tyngd av byggnadsdelar varierar naturligtvis olika mycket beroende på ingående material och i vissa fall även på byggnadsdelarnas fuktkvot. De massiva materialen har en mindre variation i tunghet än de porösa där vanligtvis även fuktkvoten påverkar tunghetens storlek. Det förädlade materialet stål tillhör gruppen med de lägsta värdena på variation i tunghet (variationskoefficient $\approx 1\%$) medan naturprodukten trä har ca 10 gånger så stor variationskoefficient ($\approx 10\%$). Kännetecknande för trä är även ett fuktkvotsberoende medelvärde, vilket även gäller vissa

produkter med stenmaterial, t ex gasbetong och asbestcement. Övriga byggnadsmaterial, med undantag för vissa isolerings- och fyllningsmaterial, har en variationskoefficient för tunghet på ca 5%. Storleken hos variationen i tyngd hos en byggnadsdel påverkas naturligtvis av såväl variationer i tunghet som av variationer i produktframställningen. Slitna valsar i stålverk eller dåligt formarbete vid betongggjutning inverkar förhöjande på variationskoefficientens värde. Värdet kan dock inte bli hur högt som helst. Även om ingen eller undermålig kontroll av produkten föreligger måste den vanligtvis kasseras på grund av att passningen med andra byggnadsdelar blir för dålig eller att någon med blotta ögat upptäcker kraftiga avvikelser från nominella värden.

På grund av egentygndens ringa variation jämfört med på byggnadsdelen verkande nyttolasts variation räknas ibland egentygndens som deterministisk med medelvärde som ingående värde. Förfaringssättet är en approximation som ger resultat något på osäkra sidan, dvs den erhållna skaderisken blir mindre än den verkliga. Nedanstående exempel beskriver approximationens inverkan.

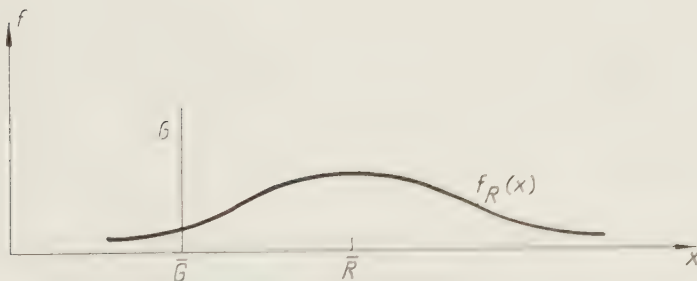


FIG 2-2. Belastningsfall med deterministisk last (egentyngd) och stokastisk bärförmåga.

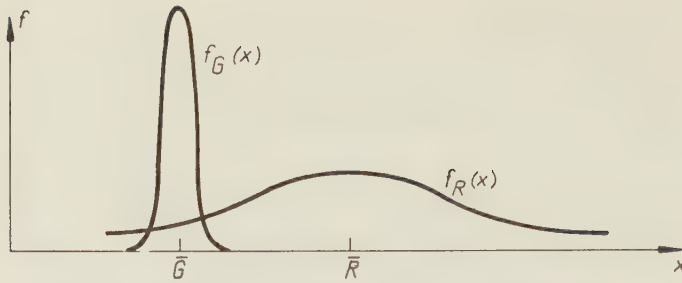


FIG 2-3. Belastningsfall med stokastisk last (egentyngd) och bärförmåga.

FIG 2-2 visar ett enkelt belastningsfall - en konstruktionsdel, med bärförmågan R som en stokastisk variabel med medelvärde $\bar{R}$ och standardavvikelse σ_R , belastad med deterministisk last $G = \bar{G}$ (endast egentyngd). FIG 2-3 visar samma fall som ovanstående men med G som stokastisk variabel med parametrarna $\bar{G}$ och σ_G .

Om både G och R antas oberoende och normalfördelade fås i fall 1

$$\varepsilon_1 = \phi \left[-\frac{\bar{R} - \bar{G}}{\sigma_R} \right] \quad (2-8)$$

och för fall 2

$$\varepsilon_2 = \phi \left[-\frac{\bar{R} - \bar{G}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_G^2}} \right] \quad (2-9)$$

Uppenbarligen är $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

En annan jämförlig metod, besläktad med det förfaringssätt som används vid partialkoefficientmetoden, är att sätta G till ett deterministiskt värde, dock ej till medelvärdet för G utan till ett valt fraktilvärde av G , exempelvis $\bar{G} + n \cdot \sigma_G$ där n betecknar antalet standardavvikelser som utgör skillnaden mellan medelvärdet och det valda värdet.

Betraktas samma belastningsfall som tidigare med den skillnaden att det deterministiska värdet i fall 1 utgöres av ett fraktilvärde, men förutsättningarna i övrigt är lika erhålles

$$\varepsilon_1 = \phi \left[- \frac{\bar{R} - \bar{G} (1 + n \delta_G)}{\sigma_R} \right] \quad (2-10)$$

och

$$\varepsilon_2 = \phi \left[- \frac{\bar{R} - \bar{G}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_G^2}} \right] \quad (2-11)$$

Man kan nu bestämma n så att samma skaderisk erhålles för de två fallen, dvs argumenten för ϕ skall vara lika i de två fallen. Detta ger

$$\frac{\bar{R} - \bar{G} (1 + n \delta_G)}{\sigma_R} = \frac{\bar{R} - \bar{G}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_G^2}}$$

eller med

$$\theta = \frac{\bar{R}}{\bar{G}}$$

$$\frac{\theta - (1 + n \delta_G)}{\sigma_R} = \frac{\theta - 1}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_G^2}}$$

vilket ger

$$n = \frac{\theta - 1}{\delta_G} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_G}{\sigma_R} \right)^2}} \right]$$

vilket ger

$$n = \frac{\theta - 1}{\delta_G} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\delta_G^2}{\theta^2 \delta_R^2}}} \right] \quad (2-12)$$

Ett numeriskt exempel med

$$\delta_G = 0.05 \quad \delta_R = 0.1 \quad \theta = 2$$

ger en skaderisk

$$\varepsilon_2 = \phi \left[- \frac{\theta - 1}{\sqrt{\delta_G^2 + \theta^2 \delta_R^2}} \right] = \phi[-4.85] \approx 6.17 \cdot 10^{-7}$$

som vid en beräkning med ett deterministiskt fraktilvärde ger

$$n = \frac{1}{0.05} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 0.0625}} \right] = 0.597$$

vilket för normalfördelningen motsvarar ett fraktilvärde på ungefär 27%.

Vanligen förekommer utöver permanent last minst en variabel last. Dessa kan indelas i huvudsak fyra grupper.

1. Nyttolaster, vilket innebär bl a last av inredning, personer, varor, fordon etc.
2. Naturlaster, t ex snö- och vindlast.
3. Olyckslaster i form av explosion, påkörning etc.
4. Deformationspåverkning t ex temperatur och fuktighetsändringar.

Dessa lasttyper har i flera avseenden avvikande egenskaper jämfört med egentygnd. Genomgående gäller att variationskoefficienterna är högre. För last av inredning och personer gäller dessutom att lastens medelvärde uppvisar ett ytberoende på så sätt att medelvärdet ökar då den belastade ytan minskar. Nyttolaster i bostads- och kontorshus delas vanligtvis in i last av inredning och last av personer. Rent intuitivt inses att dessa två lasttyper måste uppvisa en negativ korrelation med varandra, dvs en stor inredningslast medför av utrymmesskäl en liten personlast och vice versa. Ett förenklat antagande, som är på säkra sidan, är att räkna person- och inredningslaster oberoende av varandra, vilket förenklar beräkningsarbetet betydligt. Ett exempel längre fram belyser förfaringssättet ifråga. Variationskoefficienternas värden för nyttolaster ligger i området kring 40%, alltså relativt högt. Den normalt stora skillnaden mellan egentygndens och nyttolastens variationskoefficient rättfärdigar det approximativa antagandet att egentygndens variation är noll. Felet man gör är litet om nyttolastens andel av totallasten är stor vilket gäller för exempelvis stålkonstruktioner. Felets storlek kan utläsas ur nedanstående uttryck, vilket gäller för oberoende laster G och P.

$$\Delta = \frac{\delta_{S2}}{\delta_{S1}} = \frac{\frac{\bar{P} \delta_P}{\bar{G} + \bar{P}}}{\frac{\sqrt{\bar{G}^2 \delta_G^2 + \bar{P}^2 \delta_P^2}}{\bar{G} + \bar{P}}} = \frac{\bar{P} \delta_P}{\sqrt{\bar{G}^2 \delta_G^2 + \bar{P}^2 \delta_P^2}}$$

eller med $\alpha = \frac{\bar{P}}{\bar{G}}$

$$\Delta = \frac{\alpha \delta_P}{\sqrt{\delta_G^2 + \alpha^2 \delta_P^2}} \quad (2-13)$$

där Δ är relativt fel

δ_{S1} är korrekt variationskoefficient

δ_{S2} är approximerad variationskoefficient dvs $\delta_G = 0$.

För $\delta_G = 0.05$ $\delta_P = 0.4$ och $\alpha = 0.2, 1$ och 6 blir

α	0.2	1	6
Δ	0.8480	0.9923	0.9998

Naturlaster uppvisar variationer av ungefär samma storlek som nyttolaster. Något annorlunda förhåller det sig med olyckslaster. Det är något långsökt att försöka ställa upp en modell för dylika lasters uppträdande. De fall där denna lasttyp förväntas uppträda, med viss sannolikhet, får särbehandlas med avseende på säkerhet mot skada orsakad av laster av denna typ. Vanligtvis kan också skadans omfattning förutses t ex en avkörd pelare eller utblåsta väggar i ett rum.

Vad gäller nyttolastens varians jämfört med egentygndens varians så är den tidigare nästan alltid större. På grund av den i allmänhet stora variansen hos nyttolast kan inte heller den tidigare gjorda approximationen med en enpunktsfördelning användas för nyttolast då felen i så fall blir för stora. Undersökningar av nyttolast har visat ett klart beroende av storleken av den belastade ytan på så sätt att mindre belastningsytor uppvisar ett högre lastmedelvärde än större ytor. Den vid undersökningar funna variationskoefficienten hos nyttolast i byggnader varierar normalt mellan 30 och 40 procent. Ännu större värden erhålles för vissa naturlaster t ex för vindlast. I fortsättningen antas nyttolastens variationskoefficient ligga i intervallet 20 till 40 procent. I de beräkningar som genomförts har tre värden valts för att täcka in intervallet och ge information om inverkan på skaderiskens storlek.

Vad lastkombinationer beträffar så existerar för närvarande ingen korrekt metod att kombinera olika laster beroende på dels svårigheten att matematiskt behandla de uttryck som erhålles dels på att olika laster har olika varaktighet. En närmelösning på det senare kan vara att belasta kortvariga laster med korrektionskoefficienter som tar hänsyn till lastens varaktighet och sanno-

likhet för att uppträda med max värden samtidigt som andra laster når max värden. Den mest enkla av alla lastkombinationer är kombinationen egentygnd - en nyttolast. Eftersom det endast existerar en nyttolast, och egentygnden alltid finns där, försvinner problemet med nyttolastens varaktighet. Konstruktionen skall dimensioneras för de bägge lasternas max värden i samverkan. Om i stället, vilket också är den vanliga, två nyttolaster förutsätts verka blir problemet genast mer komplicerat. Ofta är det önskvärt att veta sannolikheten för att en last eller en kombination av laster skall överstiga ett visst värde. Vid sidan om kombinationsproblematiken ligger också det nödvändiga antagandet om lämplig fördelning för lasterna ifråga. Lastundersökningar som utförts har inte varit av den omfattningen att en noggrann modell har kunnat uppställas utan utfallets huvudmassa har bestämt fördelningsformen med de källor till fel som tidigare beskrivits. Ett enkelt exempel beskriver problematiken ifråga. Antag att man söker sannolikheten för att en jämnt utbredd nyttolast av 1.5 kN/m^2 överskrides i ett bostadsrum under förutsättning av att person- och inredningslaster är oberoende variabler.

Om personlastvariabeln betecknas x och inredningsvariabeln y erhålles frekvensfunktionen för summan $z = x + y$ som

$$v(z) = \int_0^z f(x) \cdot f(z-x) dx$$

om x och y är oberoende

$f(x)$ är frekvensfunktion för personlast

$f(y)$ är frekvensfunktion för inredningslast

Motsvarande fördelningsfunktion erhålles som

$$F(z) = P(x+y \leq z) = \int \int_{x+y \leq z} f(x) \cdot f(y) dx dy \quad (2-14)$$

Fördelningsformer för person- och inredningslaster kan hämtas från litteraturen. Johnson har genom intervjuer kommit fram till ett medelvärde om 0.3 kN/m^2 och en standardavvikelse om 0.15 kN/m^2 för personlaster under förutsättning att en vuxen person väger 70 kg och ett barn 35 kg. En fördelningsform av typ Extrem I har visat den bästa överensstämmelsen med försöksresultaten. Beträffande inredningslaster redovisar Sentler medelvärden, standardavvikelser och fördelningstyper för olika bostadsrum. För sovrum gäller exempelvis ett medelvärde om 0.1984 kN/m^2 och en standardavvikelse om 0.0794 kN/m^2 . Den bäst anpassade fördelningstypen är gamma.

De ovan angivna fördelningsfunktionerna skulle då få följande utseende

$$F(z) \iint_{x+y \leq z} \frac{1}{\bar{\rho}_x} e^{-\frac{1}{\bar{\rho}_x}(x-\mu)} \cdot e^{-\frac{1}{\bar{\rho}_x}(x-\mu)} \cdot \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\lambda y} dx dy \quad (2-15)$$

$$\text{där } \bar{x} = \mu + 0.577 \cdot \rho_x$$

$$\sigma_x = 1.283 \cdot \rho_x$$

$$\bar{y} = \frac{n}{\lambda}$$

$$\sigma_y^2 = \frac{n}{\lambda^2}$$

Med kända medelvärden och standardavvikelser för de två variablerna kan de i uttrycket för fördelningsfunktionen ingående parametrarna identifieras.

Integreras ovanstående uttryck erhålles

$$F(z) = \int_0^z \frac{\lambda \eta}{(\eta)} y^{\eta-1} e^{-\lambda y} \left[e^{-e^{-\frac{1}{\rho_x}(x-\mu)}} \right]^{z-y} dy \quad (2-16)$$

Om värden för inredningslasten i sovrum enligt SENTLER användes erhålles

$$\bar{y} = 0.1984 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_y = 0.0794 \text{ kN/m}^2$$

vilket ger

$$0.1984 = \frac{\eta}{\lambda}$$

$$0.006304 = \frac{\eta^2}{\lambda^2}$$

som utlöst ger

$$\lambda = 31.47$$

$$\eta = 6.244$$

För att beräkna önskade sannolikheten ($F(z)$) tillgripes numerisk integration då en analytisk sådan inte är möjlig. Beräkningen gör jag med dator med en minsta relativ noggrannhet av 0.01.

Först beräknas $\Gamma(\eta)$. Då η ej är heltal definieras $\Gamma(\eta)$ av

$$\Gamma(\eta) = \int_0^\infty u^{\eta-1} e^{-u} du \quad (2-17)$$

För $\eta = 6.244$ erhålles $\Gamma(\eta) = 182.93$. De intressanta värdena är egentligen sannolikheten för överskridande, dvs $1 - F(z)$, komplementet till $F(z)$. Istället för EKV (2-16) används uttrycket

$$1 - F(z) = \int_0^{\infty} \frac{\lambda \eta}{\Gamma(\eta)} y^{\eta-1} e^{-\lambda y} \left[e^{-e^{-\frac{1}{\rho_x}(x-\mu)}} \right]_{z-y}^{\infty} dy \quad (2-18)$$

Resultat av beräkningar med några olika z -värden visas i TAB 2-3. Observera att variabeln z är total nyttolast, dvs summan av person- och inredningslaster och $1 - F(z)$ är sannolikheten för att lasten z överskrides.

Fortfarande under förutsättningen att modellen beskriver verkligheten på ett riktigt sätt kan ur tabellen utläsas sannolikheter för överskridande av olika lastintensiteter. De tidigare gjorda antaganden om oberoende person- och inredningslaster påverkar resultatet i TAB 2-1 speciellt för höga värden på lastintensiteten. Värdet 2 kN/m^2 t ex motsvarar i praktiken antingen en trängsellast av personer varvid ingen inredning får plats eller en stor anhopning av inredning vilket reducerar återstående utrymmet för personer. De beräknade sannolikheterna för stora lastintensiteter torde därför vara högt överskattade. Det ligger nära till hands att, då höga lastintensiteter är högst osannolika, kapa av fördelningen vid ett lämpligt värde. Bestämning av trunkeringsvärdet göres lämpligen genom att uppskatta en övre gräns för de ingående delarna i totallasten. I undersökningen redovisad av Sentler erhöles för sovrum byggda efter 1940 ingen observation över 0.45 kN/m^2 av totalt 89 observationer medan ca 95 procent av utfallet hamnade i intervallet $0 - 0.35 \text{ kN/m}^2$. En uppskattnig av högsta värdet på inredningslast i sovrum skulle kunna vara 0.9 kN/m^2 vilket är dubbelt så stort som det värde över vilket inga observationer gjorts. Förfar man på samma sätt med personlaster och uppskattar den högsta personlasten i sovrum till 1.05 kN/m^2 (18 personer i ett 12 m^2 sovrum). 95 procent av utfallet hamnar i detta fall under 0.6 kN/m^2 (Johnson). De valda trunkeringsgränserna motsvarar för personlast en trunkering vid 5 standardavvikelser och för inredningslast en trunkering vid ungefär 8.8 standardavvikelser räknat från resp medelvärde.

TAB 2-3. Totallaster i sovrum och sannolikheten för lasternas överskridande.

Totallast $z(\text{kN/m}^2)$	$[1 - F(z)] \cdot 10^5$
0.50	44300
0.55	33200
0.60	24000
0.65	16900
0.70	11700
0.75	7920
0.80	5320
0.85	3540
0.90	2340
0.95	1540
1.00	1010
1.05	661
1.10	433
1.15	283
1.20	185
1.25	120
1.30	78.6
1.35	51.3
1.40	33.4
1.45	21.8
1.50	14.2
1.55	9.25
1.60	6.04
1.65	3.94
1.70	2.56
1.75	1.67
1.80	1.08
1.85	0.697
1.90	0.439
1.95	0.283
2.00	0.180
2.05	0.111
2.10	0.0588

Den utförda trunkeringen påverkar sannolikheterna i TAB 2-3 på följande sätt. För lastintensiteter mindre än eller lika med 1.95 korrigeras sannolikheterna med värdet

$$\frac{1}{1-P(z > 1.95)} \approx \frac{1}{1-2.83 \cdot 10^{-6}} \approx 1 \quad (2-19)$$

dvs en ytterst liten ändring.

För lastintensiteten > 1.95 är alla sannolikheter noll.

Integrationsgränserna i EKV (2-18) flyttas till trunkeringsvärdena dvs

$$1 - F(z) = \int_0^{0.9} \frac{\lambda \eta}{\Gamma(\eta)} y^{\eta-1} e^{-\lambda y} \left[e^{-e^{-\frac{1}{\rho_x}(x-\mu)}} \right]_{z-y}^{1.05} dy \quad (2-20)$$

Inverkan av trunkering visas av beräkningsresultat erhållna med EKV (2-20). Värdena i TAB 2-4 skall jämföras med tidigare erhållna värden redovisade i TAB 2-3. Som framgår av tabellvärden har trunkering enormt stor inverkan på beräknade skaderisker vilket även kommer att framgå i kommande kapitel.

Metoden att beräkna sannolikheten genom numerisk integration kräver, för att hålla beräkningstiden på en acceptabel nivå, tillgång till dator. Man kan naturligtvis genom enkla approximationer skaffa sig en grov uppskattning av de värden man söker. Ett sådant förfarande, som även kan ge en grafisk illustration av den volym som representerar sannolikheterna ifråga, beskrives i nedanstående exempel.

Anta som tidigare att person- och inredningslasten är känd till fördelning och parametervärden. Trunkering av lasterna göres också vid värdena 1.05 resp 0.9 kN/m². En förenkling av frekvensfunktionerna kan sedan göras för delen mellan 0.6 och 1.05 resp 0.35 och 0.9. I dessa intervall göres därför en exponentialapproximation av de två frekvensfunktionerna. Här väljes en tvåparametrig funktion där parametrarna bestäms av villkoren att

den riktiga resp den approximativa funktionen skall ha samma värden i sammankopplingspunkten samt att ytan under de approximativa funktionerna skall vara 0.05 i de intervall de gäller.

TAB 2-4. Totallast i sovrum och sannolikheter för lastens över-skridande vid trunkerade fördelningar.

Totallast $Z(\text{kN/m}^2)$	$[1 - F(z)] \cdot 10^5$
1.05	569
1.10	340
1.15	192
1.20	101
1.25	46.9
1.30	20.3
1.35	8.15
1.40	3.06
1.45	1.09
1.50	0.370
1.55	0.121
1.60	0.0378
1.65	0.0115
1.70	0.00334
1.75	0.000926
1.80	0.000236
1.85	0.0000501
1.90	0.00000639
1.95	0

Då approximationerna endast styrs av två parametrar föreligger inget villkor att frekvensfunktionernas derivator är kontinuerliga i sammankopplingspunkten.

Frekvensfunktionen för personlast f_x approximeras i intervallet 0.6 till 1.05 kN/m^2 med funktionen

$$g(x) = A \cdot e^{-\alpha x} \quad (2-21)$$

där A och α bestäms ur villkoren

$$1) \quad g(0.6) = f_x(0.6) = \frac{1}{0.117} e^{-\frac{1}{0.117}(0.6-0.233)} - e^{-\frac{1}{0.117}(0.6-0.233)} = 0.355$$

$$2) \quad \int_{0.6}^{1.05} A e^{-\alpha x} dx = 0.05$$

Villkor 1) ger

$$A e^{-0.6\alpha} = 0.355$$

Villkor 2) ger

$$\frac{A}{\alpha} [e^{-0.6\alpha} - e^{-1.05\alpha}] = 0.05$$

vilket omformas till

$$7.1 (1 - e^{-0.45\alpha}) = \alpha$$

Passningsräkning ger

$$\alpha = 6.72 \quad (2-22)$$

varefter A beräknas till

$$A = 19.9 \quad (2-23)$$

På samma sätt göres för frekvensfunktionen för inredningslast intervallet 0.35 till 0.9 kN/m² varvid frekvensfunktionen approximeras med uttrycket

$$h(y) = B e^{-\beta y} \quad (2-24)$$

Samma förfarande som ovan ger

$$\beta = 16.48 \quad (2-25)$$

och

$$B = 263.7 \quad (2-26)$$

Önskade sannolikheter erhålles nu ur integralen

$$1 - F(z) = \iint_C AB e^{-\alpha x - \beta y} dx dy \quad (2-27)$$

där tillåtet integrationsområde C enklast erhålles ur FIG 2-4.

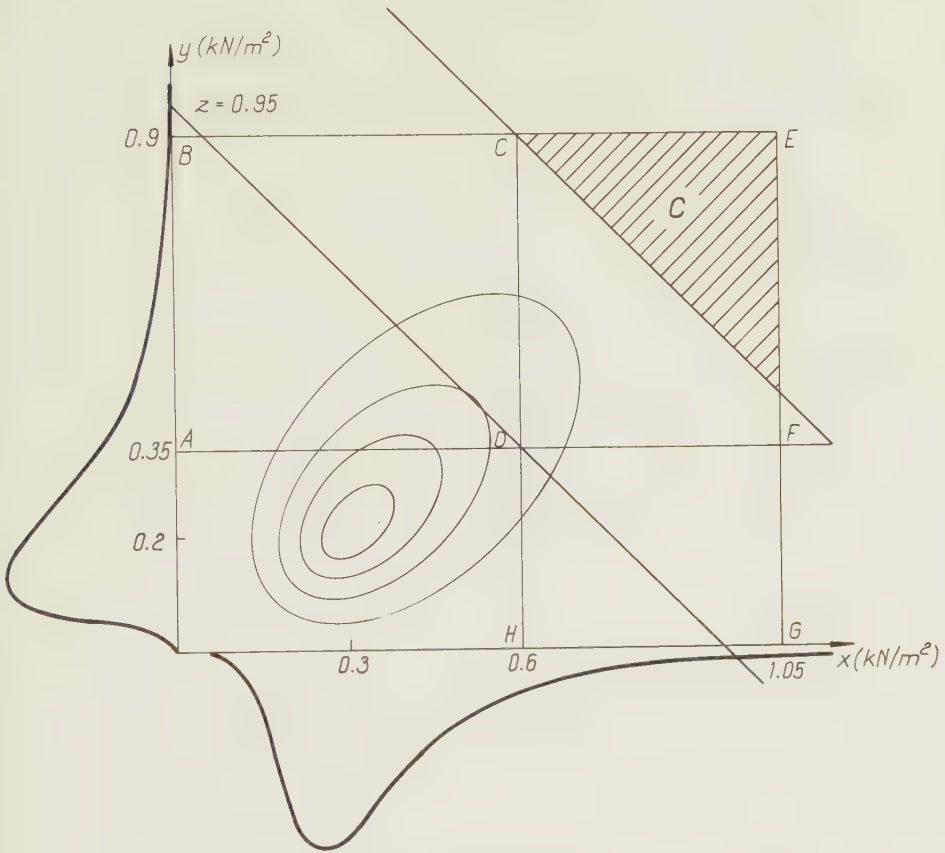


FIG2-4. Illustration av tillåtet integrationsområde för svansapproximationer.

Approximationsformeln gäller således endast i intervallet $1.5 \leq z \leq 1.95$. Linjen $z = 0.95$ är också inritad i figuren. Ingen "exakt" beräkning med approximationsformeln kan göras för detta z -värde dock kan en grov uppskattning göras av värdet på $1 - F(0.95)$ eftersom man vet att volymen under funktionsytan

i rektangeln CDEF är 0.0025.

Beräknas sannolikheter ur approximationsuttrycket (2-28) erhålles värden sammanställda i TAB 2-5.

$$1 - F(z) = \int_{z-1.05}^{0.9} \frac{AB}{\alpha} e^{-\beta y} \left[e^{-\alpha x} \right]_{1.05}^{z-y} dy \quad (2-28)$$

TAB 2-5. Totallast i sovrum. Sannolikheter beräknade med trunkerade exponentialapproximationer.

Totallast $z(\text{kN/m}^2)$	$[1 - F(z)] \cdot 10^5$
1.5	1.65
1.55	0.708
1.60	0.302
1.65	0.126
1.70	0.0508
1.75	0.0194
1.80	0.00671
1.85	0.00188
1.90	0.000306
1.95	0

En jämförelse med i TAB 2-4 redovisade värden visar att approximationen i detta fall ger värden i acceptabel närhet av de "verkliga" samt att samtliga är "på säkra sidan".

En ytterligare approximationsmetod som är analytiskt hanterbar är linjärapproximationer. Dessa ger normalt sämre noggrannhet vilket illustreras av nedanstående exempel.

Låt samma antaganden som tidigare gälla. I intervallen 0.6 till 1.05 resp 0.35 till 0.9 skall frekvensfunktionerna approximeras med rätta linjer. Om approximationsuttrycken ges värdet noll i punkterna 1.05 resp 0.9 erhålles funktionsvärdet i punkterna 0.6 resp 0.35 av villkoret att ytan under funktionerna i resp intervall skall vara 0.05. Triangelhöjderna i resp intervalls

startpunkter blir då 0.222 i punkten 0.35 för inredningslast. Eftersom approximationen endast är två parametrar och dessa parametrar bestäms av ovanstående villkor om begränsat integralvärde i intervallet samt funktionsvärde lika med noll i intervallets slutpunkt erhålles ej med nödvändighet samma funktionsvärde för "verklig" frekvensfunktion och approximationsfunktion i intervallets startpunkt. Detta var tidigare ett villkor för exponentialapproximationen som i gengäld saknade krav på funktionsvärde i intervallets slutpunkt.

Utskrivet i form av linjära funktioner erhålles för person- och inredningslast x resp y .

$$f(x) = 0.518 - 4.93 \cdot 10^{-2} \cdot x \quad 0.6 \leq x \leq 1.05 \quad (2-29)$$

$$g(y) = 0.298 - 3.30 \cdot 10^{-2} \cdot y \quad 0.35 \leq y \leq 0.9 \quad (2-30)$$

och den sökta sannolikheten för överskridande erhålles som

$$1 - F(z) = \int_{z-1.05}^{0.9} \int_{z-y}^{1.05} 10^{-4} (51.8 - 0.493x) \cdot (29.8 - 0.33y) dx dy \quad (2-31)$$

Precis som tidigare är det tillåtna intervallet för z $1.5 \leq z \leq 1.95$. I TAB 2-4 redovisas värden erhållna ur EKV 2-30 för några värden på z .

Ur de i TAB 2-6 framräknade värdena framgår att linjärapproximationen som väntat ger en mer grov uppskattning av sannolikhetsvärdena jämfört med exponentialapproximationen vilket inte är anmärkningsvärt på något sätt. Normalt är alla frekvensfunktioner konkava uppåt långt ute på svansarna. En linjär approximation av en sådan svans ger som resultat att frekvensfunktionens höjd alltid överskattas i det område där integration över approximationsformlerna är tillåten. I detta fall intervallet $1.5 \leq z \leq 1.95$. För z -värden nära 0.95 sker en motsvarande underskattning av funktionsvärdena då integralvärdena över intervallen är lika för "verklig" frekvensfunktion och approximation.

TAB 2-6. Totallast i sovrum. Sannolikheter beräknade med trunkerade linjärapproximationer.

Totallast $z \text{ kN/m}^2$	$[1 - F(z)] \cdot 10^5$
1.50	28.2
1.55	17.6
1.60	10.4
1.65	5.61
1.70	2.71
1.75	1.12
1.80	0.356
1.85	0.0717
1.90	0.00447
1.95	0

Tidigare i texten utlovades en grov uppskattning av sannolikheten för överskridande av totallasten 0.95 kN/m^2 . Uppskattningen göres med hjälp av FIG 2-4 och förfarandet beskriver ett sätt att resonera sig fram till rimliga värden på önskade sannolikheter.

Linjen $z = 0.95$ i FIG 2-3 antas dela rektanglarna ABCD och DFGH på så sätt att volymerna på båda sidor om linjen blir lika stora. Detta är en grov approximation långt på säkra sidan eftersom den volym som bestämmer risken för övertramp till ca 75 % ligger i den del av rektanglarna som endast innehåller ungefär 25 % av rektanglarnas volym. Totala volymen i ABCD = totala volymen i DFGH = $0.95 \cdot 0.05 = 0.0475$. Volymen i rektangel CEFD = $0.05 \cdot 0.05 = 0.0025$.

Då erhålles

$$P(x+y > 0.95) = 0.0025 + 2 \cdot 0.5 \cdot 0.475 = 0.05$$

vilket kan jämföras med det "exakta" ur TAB 2-3 vilket ger

$$P(x+y > 0.95) = 0.0154$$

I detta sammanhang kan det vara lämpligt att beskriva effekten

av lasters perioditet. Med en ny boende följer ofta nya typer av möbler och nya umgängesvanor. För att beräkna sannolikheten för att en viss last skall överskridas under bostadens totala livslängd måste något antagande göras om den medeltid som en familj bebor en bostad. Om byggnadens livslängd dividerad med medelboendetiden för en familj betecknas med v erhålles

$$P(\text{lasten} > z \text{ under } 1 \text{ period}) = P_1$$

$$P(\text{lasten} \leq z \text{ under } 1 \text{ period}) = 1 - P_1$$

$$P(\text{lasten} \leq z \text{ under } v \text{ perioder}) = |1 - P_1|^v$$

$$P(\text{lasten} \geq z \text{ under } v \text{ perioder}) = 1 - |1 - P_1|^v = P_2$$

under förutsättning av likafördelade och oberoende lastfördelningar. Den införda storheten v betecknar ju antalet hyresgästbyten i medeltal under en byggnads livstid. Kvoten v varierar givetvis beroende på bostadstyp och bostadsområde, den geografiska belägenheten etc. I TAB 2-7 redovisas några värden på sannolikheten P_2 för några tänkbara värden på z och v . Vid beräkningen har de trunkerade "verkliga" frekvensfunktionerna använts.

TAB 2-7. Sannolikhet för överskridande av totallast under en byggnads livstid.

Antal hyresgästbyten	Sannolikhet för överskridande $\cdot 10^5$					
	2	3	4	5	6	7
Totallast $z \text{ kN/m}^2$						
1.15	384	575	766	956	1150	1340
1.35	16.3	24.5	32.6	40.8	48.9	57.1
1.55	0.238	0.358	0.477	0.596	0.715	0.834

2.4 Mått- och hållfasthetsvärden

Avgörande för bärförmågans storlek och osäkerheter som uppkommer då denna storlek ska bestämmas är i stor utsträckning mått- och hållfasthetsvärden. Hållfasthetsvärden och deras statistiska variation ska bestämmas ur test av lämpliga provkroppar. Värdena ska därefter relateras till relevanta värden i färdig konstruktion genom omräkningsfaktorer. Den totala spridningen hos materialet i färdig konstruktion kan härledas ur spridningen i laboratorieför-söken samt ur spridningen hos omräkningsfaktorn. I de fall hållfastheten kan bestämmas innan konstruktionen färdigställs kan karakteristiska hållfasthetsvärden erhållas ur tillgängliga statistiska data. Om detta inte är möjligt dvs. om materialet tillverkas på byggnadsplatsen måste förutsatta karakteristiska värden säkras genom någon form av produktionskontroll.

I många fall är variationen hos geometriska data av sådan storleksordning att dess inverkan på bärförmågans storlek är försumbar. I sådana fall kan dessa geometriska data ges deterministiska värden. För de fall att de geometriska imperfektionerna har en avgörande betydelse för bärförmågans storlek ska dessa anses vara stokastiska variabler vars gränser bestäms av de föreskrivna toleransgränserna.

Mätta och härledda storheter kommer att närmare behandlas i avsnittet Hållfasthetsdata.

2.5 Krav

I SBN -75 kan läsas följande under rubriken: Allmänna krav på styvhet och bärförmåga:

"Byggnad anordnas så att förmändringar och sprickor, som är skadliga för dess avsedda funktion, inte uppstår samt så att säkerheten mot brott, instabilitet och fortskridande ras blir betryggande. Kraven gäller under byggnadens hela användningstid och i tillämpliga delar även under byggnadstiden."

Texten avspeglar samhällets krav på byggnadskonstruktioner vilket ska vara vägledande för berörda parter som byggherre, konstruktör, entreprenör, hyresgäster etc. Man kan uttrycka det på det viset att ovannämnda grupper deltar i ett spel där naturen är motspelare och där varje grupp strävar efter en i något avseende optimal konstruktion. Normtexter är vanligtvis utformade så att samhällets krav ska tillgodoses dvs. normen innehåller förordningar avsedda för konstruktören och byggaren. Systemet med tillåtna påkänningar ger inte utrymme åt differentierade konstruktionsberäkningar på det sätt som man skulle önska. Av de i FIG 2-1 visade blocken är det endast i blocket Krav som en differentiering kan ske. Detta block saknas emellertid i systemet med tillåtna påkänningar som i princip endast innehåller två block, normlaster och normenlig bärförmåga. Differentiering inom ramen för detta system måste göras genom att antingen ändra lasten eller bärförmågan. Bägge åtgärderna är olämpliga. Två intilliggande byggnader dimensionerade med olika krav på säkerhet kan rimligen inte ha olika värden på alla angripande laster och en ändring i bärförmågan tar inte hänsyn till varierande farlighet hos angripande laster. Om man med nuvarande system skulle dimensionera ett bostadshus och en lantbruksbyggnad belägna intill varandra skulle en differentierad konstruktionsberäkning medföra vissa inkonsekvenser. Beroende på mindre risk för personskada i lantbruksbyggnaden vore det önskvärt att bygga denna något billigare än bostadshuset och samtidigt naturligtvis något mer osäker. Anta vidare att myndigheterna tillåter en förhöjning av tillåtna påkänningar vid beräkning av lantbruksbyggnader och att på detta

sätt mindre dimensioner och en billigare konstruktion erhålles. Efter rimlig tid skulle regionen bestå av starka bostadshus och på alla punkter svagare ekonomibyggnader. Om någon eller några av dessa byggnader drabbas av överlast sker brott och beroende av lastens art reagerar omgivningen olika. I de fall överlasten utgörs av rumslast i någon form är reaktionen måttlig både hos myndigheter och enskild husägare men består överlasten av stark vind inträffar något annat. Husägarna som drabbas tycker naturligtvis situationen är allt annat än angenäm men ej heller oacceptabel. De har spelat och förlorat. För samhällets del är dock situationen annorlunda. Vinden drabbar ju alla hus i regionen och om alla eller en mångfald av de ekonomibyggnader som finns i regionen blåser omkull är det en katastrof som inte kan accepteras av samhället. Skador orsakade av hög vindlast har en tendens att "klumpa sig" geografiskt, vilket kan kompenseras med större säkerhetsmarginal jämfört med övriga laster. Exemplet ovan visar att en differentiering av risker endast är möjlig i ett system där olika komponenter kan tilldelas olika risknivåer t ex genom partialkoefficienter eller föreskriven skaderisk.

För att återgå till inledningstexten citerat ur SBN. Det är stora filosofiska svårigheter förknippat med utformning av normtexter. Vad innebär egentligen uttryck som "betryggande säkerhet till rimlig kostnad"? Det finns idag olika sätt att definiera säkerhet t.ex. genom konstant tillförlitlighet med till fördelningsform specificerade last och bärförmågeparametrar, genom en familj av föreskrivna säkerhetsindex eller ett enda säkerhetsindex. Det senare får anses vara för enkelt. Det innebär ju bl.a. att en takås i böjning ges samma säkerhet som en upphängningsdymling för en bärande vägg i ett flervåningshus. Det första alternativet måste av samma skäl modifieras till att omfatta ett antal föreskrivna tillförlitlighetsvärden fördelade över konstruktionskomponenter - en utveckling till nästa generation normer. Återstår således förslaget med en familj av föreskrivna säkerhetsindex som, med den information som idag finns tillgänglig, tycks vara den enda framkomliga vägen för en differentierad norm.

Kvarstår gör problemet med att tilldela värden till familjen med säkerhetsindex. Man kan naturligtvis kalibrera nya normer efter de gamla men detta är värdefullt endast om man vill ändra normens form men ej dess innehåll. Dessutom är tillförlitligheten hos konstruktioner beräknade med nuvarande normer i stort sett okänd, åtminstone för vissa gränstillstånd. Man kan också välja värden subjektivt för varje gränstillstånd vilket stöter på den svårigheten att översättning från säkerhetsindex till skaderisk inte utan vidare kan göras.

Ett annat förslag är att föreskriva en bestämd årlig brottsannolikhet, t.ex. 10^{-5} , för varje konstruktion men även detta stöter på vissa tolkningsproblem. Menas det att varje konstruktion ska ha minst den angivna säkerheten eller är tillförlitligheten ett medelvärde, en av 10^5 olika konstruktioner. Dessutom kan konstruktioner, dimensionerade på detta sätt, fogas samman till en enda konstruktion som då erhåller en brottsannolikhet som är större än för de ingående delkonstruktionerna. Det är därför inte klart hur en enda gräns kan användas när det gäller att bestämma tillförlitligheten hos en konstruktion.

Val av säkerhetsnivåer är också förknippade med allmänhetens reaktion vid inträffade olyckshändelser. Exempelvis uppfattas en stor olyckshändelse med 10 dödade personer som mer allvarlig än 10 mindre olyckshändelser där 1 person avlider. På samma sätt tycks det vara olika reaktioner vid olika typer av aktiviteter. Vid flygning t.ex. är man normalt beredd att ta större risker än då man befinner sig i en byggnad. Om exempelvis 100 personer omkommer i en flygkrasch mottas detta inte på samma sätt som om personerna omkommit vid ras av flygterminalbyggnaden. Jämfört med flygplan är det relativt så mycket billigare att göra byggnaden säker att den förväntas vara det. Hur olyckor uppmärksammas tycks också bero på hur sällsynta de är. Om ras eller andra olyckor är lätta att förhindra, desto mer sällsynta är de och desto större är nyhetsinnehållet och allmänhetens respons om olycka sker. Vidare, har det visat sig, har människor en icke-linjär funktion när det gäller respons inför olyckor eller förluster och föredrar

att det satsas pengar för att undvika ett visst mått av förlust orsakat vid ett tillfälle framför att samma mängd pengar satsas för att undvika samma förlust orsakad vid många tillfällen. Utförda experiment har dessutom visat att olika intressegrupper har olika grader av ickelinjearitet. Exempelvis vill hyresgäster inte betala för att erhålla ett extra skydd mot skador av jordbävningar medan å andra sidan myndigheter är villiga att göra detta. Olikheterna kan också uttryckas som:

Är endast personlig risk inblandad och säkerhet ska betalas ur egen ficka tillåter man högre skaderisk än i det fall flera personer beslutar i samråd och kostnaden tas ur allmänna medel.

Pågående forskningsarbete, samarbete mellan ingenjörer, psykologer, filosofer och ekonomer, är inriktat på dessa problem. Hur ska utformningen av normer se ut och hur ska säkerhetsnivåer väljas så att människan, med sitt uppenbart irrationella val av värden, genom "fritt val" förmås att handla till sitt eget bästa.

3 VERIFIKATIONSMETODER

3.1 Allmänt

Under senare år har flera metoder framtagits för att i statistiska termer formulera ett dimensioneringsproblem. Metoderna är alla approximativa i den bemärkelsen att de endast ger "exakt" resultat under vissa betingelser. Metoderna beskrivs inte här. Åkerlund har tidigare behandlat de vanligast förekommande approximativa metoderna. Istället beskrivs nedan den teoretiskt korrekta metoden, dess fördelar, nackdelar och förutsättningar. I kap 2 användes utan närmare förklaring begrepp som skaderisk, risk för överskridande under en byggnads livstid etc i avsikt att utan tyngande härledningar beskriva olika sätt att se på skaderisker. Därför kunde det nu vara lämpligt att behandla något av teorin bakom de uttryck som kommer att användas i fortsättningen och som delvis använts i kap 2.

Om man utför dragprov på ett antal provstavar t ex för att bestämma sträckgränsen hos en viss stålqualität kommer mätresultaten att variera mer eller mindre dvs inget bestämt värde på sträckgränsen kan erhållas. Att dessa variationer förekommer beror på ett antal olika faktorer mer eller mindre komplicerade och okontrollerbara. För att göra det möjligt att ta hänsyn till dessa faktorer vid dimensionering är det bekvämt att införa begreppet stokastisk variabel. Matematiskt uttryckt är en stokastisk variabel en numerisk storhet vars värde bestäms av en funktion från ett sannolikhetsfält (probability space, Ω , F , P) där Ω betecknar utfallsrum (sample space), F en mängd av delmängder av Ω (Borel Field) och P en funktion från F till de reella talen. Den stokastiska variabelns variation beskrivs lättast genom dess fördelningsfunktion eller frekvensfunktion. Dessa kan vara både diskreta och kontinuerliga. I fortsättningen behandlas dock nästan undantagslöst den kontinuerliga variabeln.

En stokastisk variabel varierar i regel enligt ett visst mönster som i sig självt är svårt att kartlägga exakt eftersom detta kräver frekvensundersökningar i ett oändligt antal intervall. Det vanliga sättet att illustrera den relativa förekomsten av

olika variabelvärden är istället histogramformen, dvs mätresultaten sorteras in i relativt breda intervall varvid en kantig frekvensfunktion i princip enligt FIG 3-1 erhålles.



FIG 3-1. Frekvensfunktion i histogramform.

Av frekvensfunktionen kan därefter fördelningsfunktionen eller den kumulativa frekvensfunktionen bildas (FIG 3-2) som en summapolygon vilken bildar en kontinuerlig och styckvis linjär funktion.



FIG 3-2. Fördelningsfunktion ur FIG 3-1.

Den oregelbundna formen hos frekvens- resp fördelningsfunktion medför svårigheter vid matematisk behandling (undantaget numeriska beräkningar på dator t ex Monte-Carlo-simulering),

varvid uppställandet av en modell är nödvändigt för vidare beräkningar. Lämpliga modeller för bärförmågeparametrarna är stokastiska slumpmodeller med känd form som anpassas till försöksresultat. Då de flesta kända fördelningar har utsträckning till oändligheten i någon riktning måste fördelningen modifieras något för att bättre beskriva verkliga förhållanden. En materialparameter som sträckgräns kan t ex inte gärna vara mindre än noll samtidigt som sannolikheten att den är oändligt stor måste vara noll. Slumpmodellens utseende blir i motsvarande fall en fördelning med känd form kring medelvärdet men med stympade svansar. För att ytan under frekvensfunktionen skall bibehålla sitt värde måste denna "lyftas" något för att kompensera bortfallet vid svansarna.

Ett typiskt utseende hos en dylik frekvensfunktion visas i FIG 3-3.

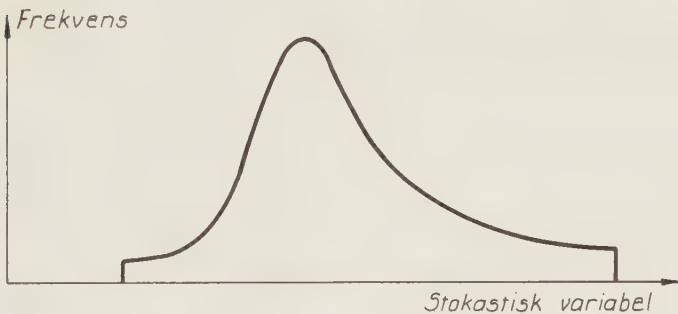


FIG 3-3. Stympad frekvensfunktion.

De matematiska uttrycken för en trunkerad frekvensfunktion bibehåller en snygg form efter ingreppet och är fortfarande lätta att handskas med. Annorlunda förhåller det sig när slumpmodeller för materialegenskaper, geometri etc skall sammansättas till en slumpmodell för bärförmåga. Endast i ett fåtal fall då de i uttrycket för bärförmågan ingående parametrarna är oberoende och beskrivs väl av vissa fördelningstyper så kan fördelningen för bärförmågan beskrivas med en känd modell. Om t ex bärförmågan R kan skrivas som

$$R = M \cdot L$$

där M och L är beta- resp gammafördelade med vissa bestämda parametrar m och λ så blir R gammafördelad med parametrar bestämda av λ och m . Oftast är förhållandena sådana att de olika parametrarna måste representeras med andra skilda typer av modeller. T ex kan en sträckgränsfördelning ibland representeras med en normalfördelning medan fördelningen för geometriska mått måste representeras med en modell med skev form på grund av att delar med små mått sorterats bort genom produktkontroll.

Entydigt bestämmande för en tvåparametrig modell är angivandet av parametrarnas medelvärde, spridning och fördelningstyp. Om fördelningen inte tillhör gruppen kända typer, anges istället frekvens- eller fördelningsfunktion.

Medelvärde och spridning definieras som första och andra moment kring medelvärdet enligt

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (3-1)$$

och

$$\sigma = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x) dx} \quad (3-2)$$

där m är medelvärdet
 σ är spridningen
 $f(x)$ är frekvensfunktionen.

Ett alternativ till spridningsangivelse är begreppet variationskoefficient definierat som

$$d = \sigma/m \quad (3-3)$$

vilken ofta anges i procent.

I dimensioneringssammanhang används ofta även fraktilstorheter

av en viss parameter eller av totala bärförmågan. Fraktilvärdet bestäms ur fördelningsfunktionen enligt

$$x_{\alpha'} = F^{-1}(\alpha') \quad (3-4)$$

där α' är fraktilens storlek

x_{α} är parametervärde för viss fraktil α

$F(x)$ är fördelningsfunktion för parametern ifråga.

Den mest använda fraktilen är 5%-fraktilen vilket i klartext innebär att 5 % av utfallet hos variabeln hamnar vid sidan av värdet $x_{0.05}$. Den skuggade ytan i FIG 3-4 illustrerar fraktilvärdet för en parameterfördelning.

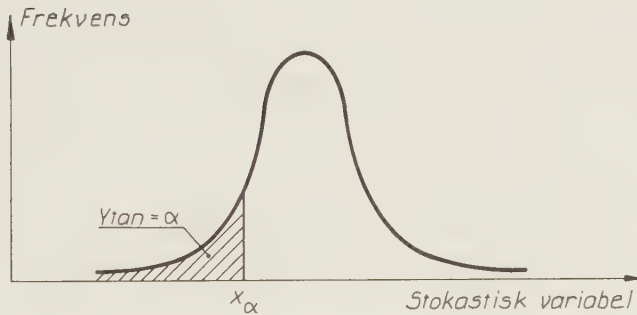


FIG 3-4. Frekvensfunktion med fraktilen α utritad.

Parametrar som materialegenskaper och geometri är i allmänhet oberoende av varandra vilket statistiskt uttryckt betyder att kovariansen är noll. Detta kan även anses gälla för geometrimått i ett snitt om profilen ifråga är sammansatt av olika delar t ex en svetsad stålprofil. I övriga fall förekommer oftast någon korrelation mellan tvärsnittsmåtten. Hos en valsad stålprofil t ex som får större tvärsnittsmått beroende på slitage hos valsarna, föreligger en positiv korrelation mellan tvärmått hos flänsar och tvärmått hos liv. Som korrelationsmått används kovarians definierat som

$$C(x, y) = E[(x - m_x)(y - m_y)] \quad (3-5)$$

eller ännu oftare korrelationskoefficient som tecknas

$$\rho(x, y) = \frac{L(x, y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y} \quad (3-6)$$

Med hjälp av stokastiska variabler kan man formulera ett mer rationellt mått för en konstruktions tillförlitlighet än vad nuvarande dimensioneringsregler tillåter. Om tillgång till erforderliga mängder av data finnes kan måttet formuleras direkt som en beräknad skaderisk p_f där

$$p_f = P(R \leq S) \quad (3-7)$$

där R betecknar bärförmåga

S betecknar lasteffekt

R och S kan vara relaterade både till snitt och hel konstruktion. Normalt föreligger inte tillräcklig kännedom om ingående variabler för att ovanstående beräkningsmetod, som i detta avseende kan benämnas exakt, skall vara utförbar. Istället närmar man sig problemet genom användning av approximativa metoder, ställföreträdande mått på brottrisk, fördelningsfria metoder etc. Mer om detta kommer längre fram. Antag till att börja med att nödvändiga förutsättningar och uppgifter är kända och finns tillgängliga i en form som är matematisk hanterbar.

Frekvensfunktionerna för de kända lasteffekt- och bärförmågeparametrarna S och R , här betecknade med $f_S(x)$ resp $f_R(x)$, illustreras i FIG 3-5.

Om S och R är oberoende kan beräknad skaderisk p_f direkt tecknas som

$$p_f = \int_{-\infty}^{\infty} \int_y^{\infty} f_S(x) f_R(y) dx dy \quad (3-8)$$

Oändlighetsgränserna förutsätter att frekvensfunktionerna verkligen är definierade på hela reella axeln. I annat fall ersättes gränserna med de aktuella. Längre fram behandlas i stor utsträckning frekvensfunktioner som av olika anledningar kan antas ha ett

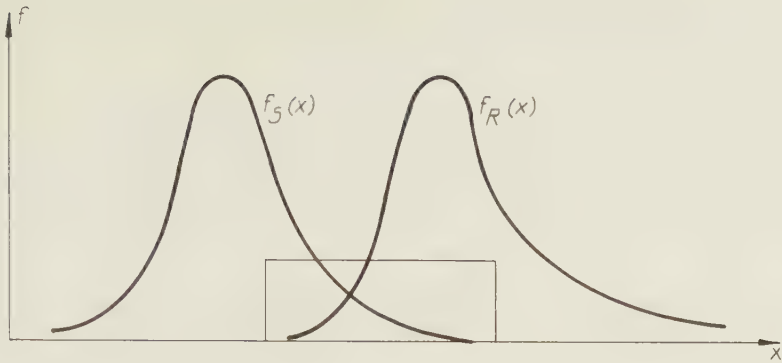


FIG 3-5. Frekvensfunktioner för lasteffekt och bärförmåga.

begränsat definitionsområde. Beroende på trunkeringssätt korrigeras frekvensfunktionerna med olika faktorer för att bibehålla villkoret att integralen av frekvensfunktionen över det definierade intervallet skall vara lika med 1. Normalt sker trunkering på så sätt att funktionen "kapas av" vid bestämda gränser (FIG 3-6) varvid korrektionsfaktorn för frekvensfunktionen blir

$$\frac{1}{1 - F(x_1)} \cdot \frac{1}{F(x_2)} \quad (3-9)$$

där x_1 och x_2 definieras i FIG 3-6.

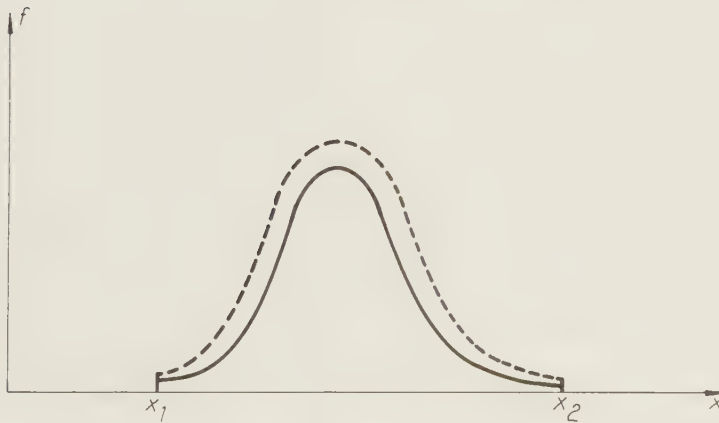


FIG 3-6. Stympad frekvensfunktion.

Den streckade kurvan i FIG 3-6 utvisar något överdrivet den nya stympade frekvensfunktionens utseende.

Andra trunkeringsmetoder är möjliga men tas inte upp i detta sammanhang. Innebörden av uttrycket (3-8) framgår bäst genom att betrakta den i FIG 3-5 inramade figurdelen. Denna visas i förstord skala i FIG 3-7.

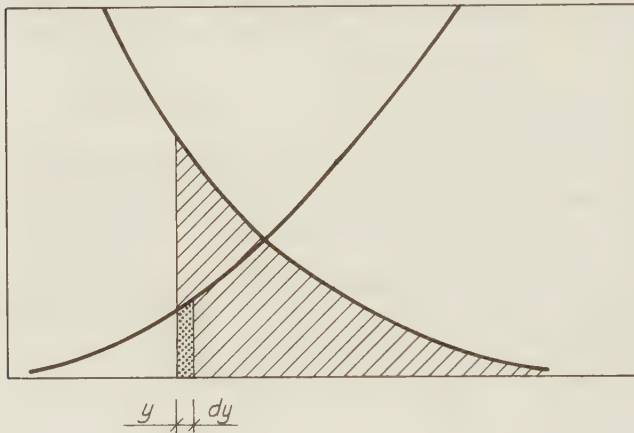


FIG 3-7. Interferensområde för lasteffekt- och bärförmågeparametrar.

Uttrycket (3-8)

$$p_f = \int_{-\infty}^{\infty} f_R(y) dy \int_y^{\infty} f_S(x) dx \quad (3-10)$$

kan illustreras i FIG 3-7 på följande sätt. Sannolikheten att bärförmågan hamnar i intervallet $(y, y + dy)$ är $f_R(y) \cdot dy$ (skuggat område i FIG 3-7). Sannolikheten för brott betingat av att bärförmågeparametern ligger i intervallet $(y, y + dy)$ är

$$f_R(y) dy \cdot \int_y^{\infty} f_S(x) dx \quad (3-11)$$

där $\int_y^{\infty} f_S(x) dx$ är sannolikheten att lastparameterns värde över-

stiger bärformågens, dvs värdet y . Sannolikheten representeras i FIG 3-7 av ytan av det streckade området.

Enligt lagen om total sannolikhet erhålles den sökta brottrisen ur uttrycket

$$P(U \in A) = \int_{-\infty}^{\infty} P(U \in A | V = v) f_V(v) dv \quad (3-12)$$

eller med tidigare använda beteckningar

$$p_f = \int_{-\infty}^{\infty} f_R(y) dy \int_y^{\infty} f_S(x) dx \quad (3-13)$$

dvs uttrycket 3-10

Integreras sista delen av uttrycket (3-13) erhålles efter insättning av integrationsgränser

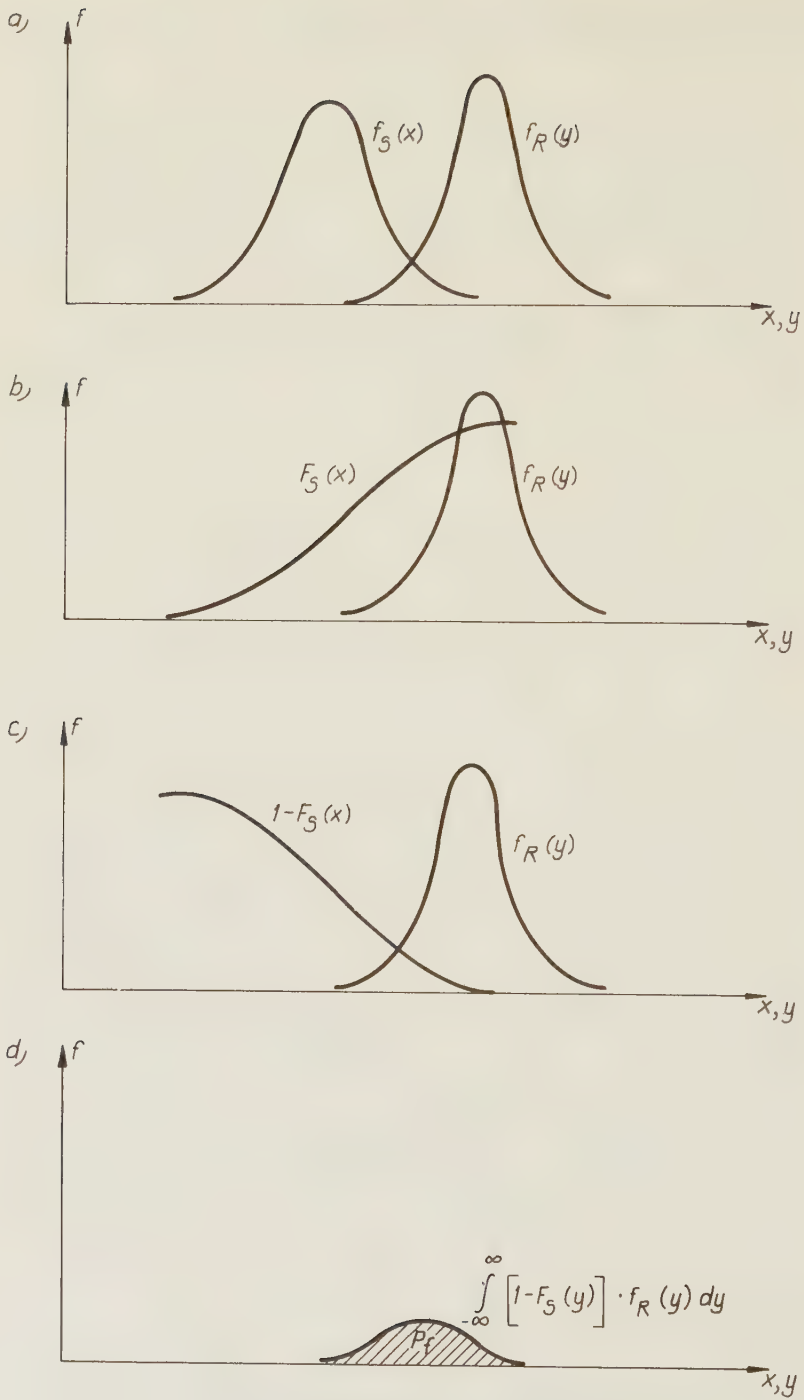
$$p_f = \int_{\infty}^{\infty} f_R(y) |1 - F_S(y)| dy \quad (3-14)$$

Med hjälp av uttrycket (3-14) kan skaderisken illustreras på ett mer överskådligt sätt. Ur frekvensfunktionen $f_S(x)$ (FIG 3-8a) erhålles fördelningsfunktionen $F_S(x)$ (FIG 3-8b). Den nya funktionen $1 - F_S(x)$ (FIG 3-8c) ger därefter den sökta skaderisken genom att dess värden multipliceras med värdena för $f_R(y)$ i varje punkt i intervallet och därefter summeras (FIG 3-8d). Metoden framgår bäst av ett exempel. För åskådlighetens skull antas såväl lasteffekt- som bärformågeparametern vara en diskret variabel. Dessa båda variabler illustreras i FIG 3-9. Bägge har för enkelhets skull ritats symmetriska. Bildas då efter funktionen $1 - F_S(x)$ (FIG 3-10) erhålles önskad skaderisk genom multiplikation och summering av funktionsvärdena för $1 - F_S(y)$ och $f_R(y)$ varje y -värde.

I detta fall erhålles ur FIG 3-10

$$\frac{5 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot 13 \cdot 13} = \frac{10}{2704} = 0.0037$$

Observera att endast en del av funktionen $1 - F_S(y)$ finns utritad i figuren av utrymmesskal. Det intressanta interferensintervallet



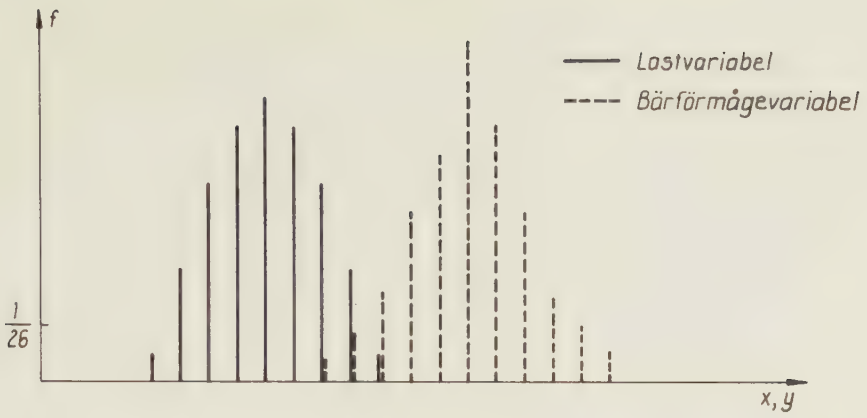


FIG 3-9. Diskreta last- och bärförstågevariabler.

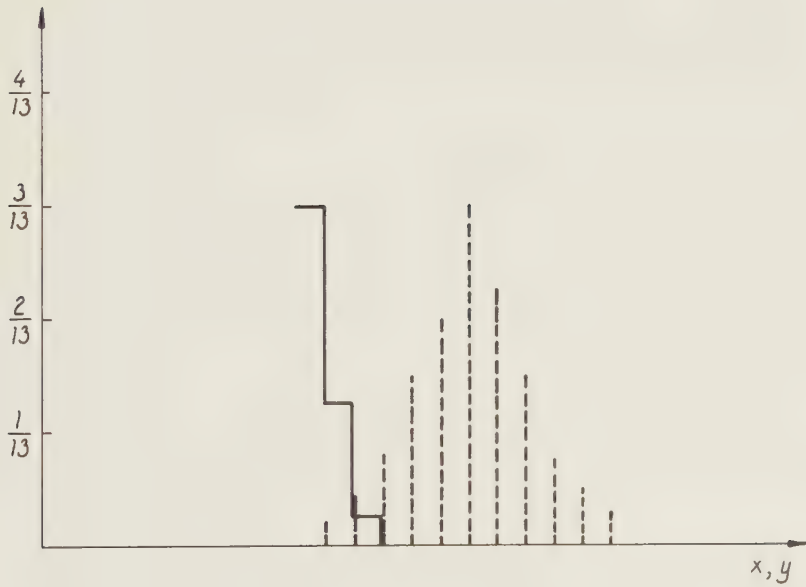


FIG 3-10. $1 - F_S(x)$ och $f_R(y)$ för beräkningsexempel.

omfattar endast fyra värden på horisontalaxeln av vilka ett är lika med noll. Vanligtvis kan inte naturen representeras med modeller lika enkla som den ovan exemplifierade utan beskrivningen måste göras mer ingående vilket oftast medför komplicerade beräkningar. För vissa val av kända fördelningar kan förhållandevis enkla uttryck för beräknad skaderisk erhållas. Ett sådant fall är då både lasteffekt- och bärförmågeparametrarna kan beskrivas med en normalfördelningsmodell, dvs

$$R \in N(\bar{R}, \sigma_R)$$

$$S \in N(\bar{S}, \sigma_S)$$

Skaderisken $P(R \leq S) = p_f$ tecknas nu som

$$p_f = P(R - S \leq 0)$$

Om R och S är oberoende och normalfördelade så är också differensen $R - S$ normalfördelad med medelvärdet $\bar{R} - \bar{S}$ och standardavvikelsen $\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$ dvs

$$R - S \in N(\bar{R} - \bar{S}, \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2})$$

Den sökta brottrisken erhålles nu ur normalfördelningstabell eftersom

$$\frac{R - S - \bar{R} - \bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \in N(0, 1)$$

Grafiskt illustreras skaderisken av det streckade området i FIG 3-11.

Skaderisken kan också uttryckas på ett annat sätt. I FIG 3-11 är avståndet från origo till medelvärdet för $R - S$ variabeln betecknat med $\beta \cdot \sigma_{R-S}$, dvs

$$\bar{R} - \bar{S} = \beta \cdot \sigma_{R-S} \quad \text{eller}$$

$$\beta = \frac{\bar{R} - \bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (3-15)$$

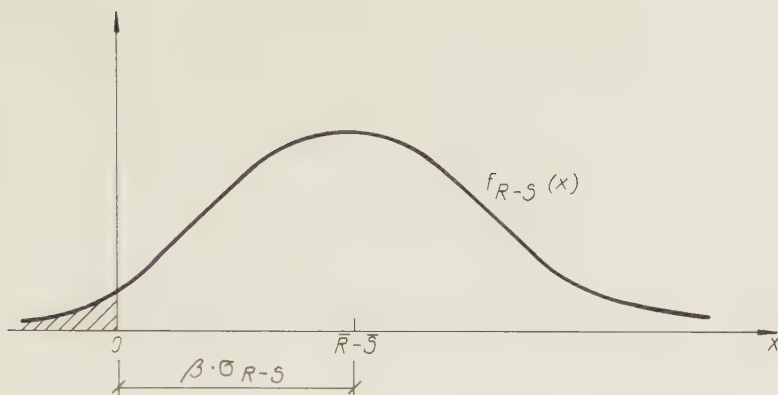


FIG 3-11. Skaderisk för normalfördelade variabler.

Storheten β benämns ställföreträdande mått på skaderisk och utgör i ovanstående fall ett "exakt" mått. I de fall R och S representeras av andra fördelningar utgör β ett approximativt mått på skaderisken. Uttrycket (3-15) är också känt som Cornells metod, en av de först introducerade fördelningsfria metoderna. En annan samtida metod, kallad Estevas metod, utnyttjar antagandet att R och S är lognormalfördelade. Då erhålles istället

$$P(R \leq S) = P\left(\frac{R}{S} \leq 1\right) = P(\ln R - \ln S \leq 0)$$

$\ln R$ och $\ln S$ är normalfördelade och oberoende. Variabeln $\ln R - \ln S$ är då också normalfördelad. Medelvärde och varians kan beräknas med Gauss approximationsformler och ger

$$\overline{\ln R - \ln S} \approx \ln \bar{R} - \ln \bar{S}$$

$$\sigma_{\ln R - \ln S} = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$$

Estevas β blir då

$$\beta = \frac{\ln \bar{R} - \ln \bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (3-16)$$

Liksom för Cornells metod gäller att det ställföreträdande måttet är "exakt" om fördelningsantagandet är riktigt. I annat fall ger metoden ett approximativt mått på skaderisken. Metodernas noggrannhet beror givetvis av förutsättningarnas giltighet och rimlighet men har utöver detta även andra nackdelar som avsaknad av invarians vid addition (Estevas metod) och multiplikation (Cornells metod). I sammanhanget bör nämnas att avsaknad av invarians inte är något oöverstigligt problem. En entydig definition av vad som är last och vad som är bärförmåga eliminerar nackdelen.

Ett annat ofta använt fördelningsfritt system är partialkoefficientmetoden eller pk-metod. Metoden grundar sig på användandet av fraktilvärden som viktas med faktorer (partialkoefficienter) som tar hänsyn till de osäkerheter som inte beaktas i ett fraktilvärde. Vid beräkning av fraktilvärden anses normalt alla variabler normalfördelade. Uttrycket i formelform beskrivs pk-metoden som

$$\gamma_G G_k + \gamma_P P_k \leq R_k / \gamma_R \quad (3-17)$$

där γ_G , γ_P och γ_R är partialkoefficienter
 G_k , P_k och R_k är karakteristiska värden

vilka beskrivs genom operationerna

$$G_k = \bar{G} (1 + k_G \delta_G) \quad (3-18)$$

$$P_k = \bar{P} (1 + k_P \delta_P) \quad (3-19)$$

$$R_k = \bar{R} (1 - k_R \delta_R) \quad (3-20)$$

där k representerar vald fraktil och
 δ står för variationskoefficient.

På ett partialkoefficientsystem ställs bl a följande krav

1. Ändringar i ingående variablers variationskoefficienter bör endast påverka respektive variablers partialkoefficient.
2. Partialkoefficienterna bör vara oberoende av nivån hos last och bärförmåga.

Vid användandet av pk-metod måste koefficienterna kalibreras så att varje kombination av koefficienter motsvarar en viss given skaderisk. Önskvärt vore också att hitta partialkoefficienter som är oberoende av värdet på kvoten nyttig last/egentyngd.

I BIL D ges ett exempel på kalibrering av partialkoefficienter.

Pk-metoden har fått stor utbredning som en "introduktionsmetod" till statistiska beräkningsmetoder. Anledningen är dock inte att den besitter egenskaper som är lämpliga eller försvarbara ur statistisk synpunkt utan att metoden är förhållandevis enkel.

3.2 Mer generella metoder

I början av 1970-talet publicerades flera förslag till nya säkerhetssystem. Av dessa förtjänar flera att omnämnas men här berörs endast två, Hasofer-Linds system som först publicerades 1972 och Paloheimos metod, publicerad i flera versioner varav den första 1973.

Hasofer-Linds system var av första ordningens samt var "exakt" och invariant dvs konstruktören behövde ej specificera vilka variabler som var last- och vilka som var bärförmågevariabler.

Tillvägagångssätt och definitioner framgår av FIG 3-12 och avser ett tvådimensionellt fall där R och S betecknar bärförmåga resp lasteffekt.

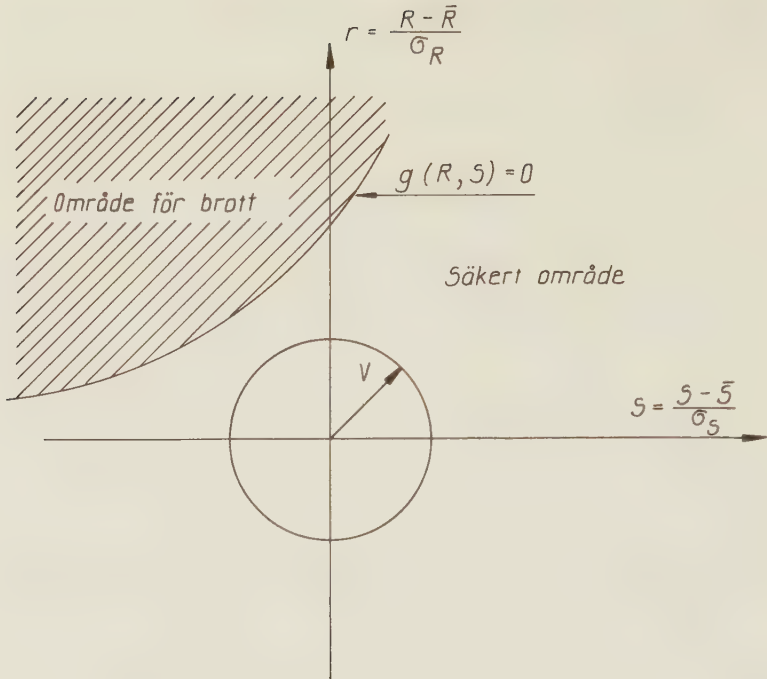


FIG 3-11. Hasofer - Linds säkerhetssystem.

Om en cirkel med radien v centreras i origo i det koordinatsystem vars axlar representerar de standardiserade variablerna så kan säkerhetskravet formuleras som: Om den största radie som kan erhållas hos en cirkel som helt ligger i det säkra området benämns v_1 så ska gälla att $\beta \leq v_1$. Systemet är logiskt under förutsättning av att den största delen av sannolikhetsmassan är koncentrerad inom cirkeln. Detta är även ett allmänt krav för att första ordningens säkerhetsteorier ska vara användbara. Det vore ju meningslöst att tala om säkerhetsmått i antal standardavvikelser mellan variablers medelvärden om inte sannolikhetsmassan vore samlad kring respektive medelvärden. Representationen i FIG 3-11 med användande av standardiserade variabler medför väsentligen två fördelar, dels blir avstånd

längs axlarna jämförbara dels ger den grafiska representationen en direkt uppfattning av säkerhetsmättet β . Alternativt till användandet av en cirkel kan man tänka sig en kvadrat med sidlängd 2β men det är i detta fall ett sämre alternativ därför att andra former än en cirkel sannolikt har en ojämn sannolikhetstäthet längs ränderna. I fallet normalfördelade variabler kommer cirklar att motsvara nivå-linjer för konstant sannolikhetstäthet. Är gränskurvan dessutom lin-jär erhålles ett entydigt samband mellan säkerhetsmättet β och brott-risken.

Problemet bestäms helt av gränskurvan g dvs dimensioneringsproble-mets mekaniska formulering.

Olika brottmoder och påkänningsväxlingar beaktas genom ett ökat antal gränskurvor och säkerhetskravet omformas då till $\beta \leq \min (v_1, v_2 \dots v_n)$.

Den ovan beskrivna metoden anger ett sätt att med endast basdata och beräkningsmodell som ingående delar bestämma ett säkerhetsmått.

Paloheimos metod är närbesläktad med Hasofer-Linds men expanderad i den meningen att bestämning av dimensioneringsvärden kan göras utan iteration. Paloheimo visade att i dimensioneringspunkten er-hålles minimum av inverkan av avvikelser hos beräknade vikter α . Dessa kunde därför diskretiseras och gälla i vida intervall för respektive variablers standardavvikelser. Härledningen för Palo-heimos metod är densamma som för den metod enligt nivå II som föreslagits av internationella grupper i samverkan (Joint Committee on Structural Safety). Metoden presenteras nedan men först intro-duceras några definitioner rörande säkerhetssystem som föreslagits av ovan nämnda grupp.

Statistiska dimensioneringsmetoder som framtagits har olika grader av komplexitet och kan därför kategoriseras med hänsyn till hur sofistikerade metoderna anses vara. Säkerhetsmetoderna anses falla i någon av tre klasser eller nivåer. Dessa nivåer definieras enligt nedan.

- Nivå III Hit hör de metoder som baserar säkerhetstesten på "exakta" sannolikhetskalkyler för hela system av konstruktioner. Metoden kräver full kännedom om den simultana fördelningsfunktionen av alla ingående dimensioneringsvariabler. Konstruktionens säkerhet beräknas därefter som integralen av den simultana fördelningsfunktionen över det säkra området i det rum som spännes upp av de ingående dimensioneringsvariablerna.
- Nivå II Säkerhetskontrollen sker inte som i nivå III genom en kontinuerlig process utan kontrollen sker endast i en punkt alternativt några få punkter på den kurva som ges av den funktion som beskriver ett visst gränstillstånd. En metod i nivå II inbegriper också ett sätt att identifiera den punkt där säkerheten ska kontrolleras liksom en metod att idealisera gränstillståndskurvan i denna punkt.
- Nivå I Dimensioneringsmetoder där lämpliga nivåer av säkerhet beskrives genom ett antal partialkoefficienter som tillsammans med ingående variablers karakteristiska värden ger kontrollpunkternas värden.

Inom den närmaste framtiden kommer förmodligen system enligt nivå I huvudsakligen att användas. Metoder enligt nivå III kommer att användas endast för vissa speciella konstruktioner där konsekvenserna av skada är mycket stora samt som verktyg för forskare. Normskrivare

kommer företrädesvis att använda metoder i nivå II för att beräkna partialkoefficienter för att användas i nivå I. Nivå I och II är därför de mest intressanta delarna för närvarande.

Om den mekaniska formuleringen av ett dimensioneringsproblem kan skrivas som

$$g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = 0 \quad (3-21)$$

där $x_1, x_2, \dots, x_n$ är dimensioneringsvariabler t.ex.
lasteffekt, materialhållfasthet etc.

så ges brottvillkoret av $g \leq 0$. I en formulering enligt nivå II ska den punkt bestämmas i vilken en linearisering av g kan ske. Punkten i fråga betecknas med $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ och det säkerhetsindex β som beskriver graden av tillförlitlighet skrives som

$$\beta = \frac{\bar{h}}{\sigma_h} \quad (3-22)$$

där h är den linjära approximationen av $g = 0$ i punkterna $(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*)$

dvs.

$$h = g(x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} (x_i - x_i^*) \quad (3-23)$$

där derivatorna är utvecklade i punkten $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$.

För okorrelerade x_i gäller att

$$\bar{h} \approx g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} (\bar{x}_i - x_i^*) \quad (3-24)$$

och

$$\sigma_h \approx \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \text{Var}(x_i)} \quad (3-25)$$

Det är ofta bekvämt att uttrycka (3-25) i en linjär form av de ingående variablerna σ_i eller $\sqrt{\text{Var}(x_i)}$. En sådan form är

$$\sigma_h = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial g}{\partial x_i} \sigma_i \quad (3-26)$$

där

$$\alpha_i = \frac{\frac{\partial g}{\partial x_i} \sigma_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial x_j} \sigma_j\right)^2}} \quad (3-27)$$

Om uttrycket (3-22) skrives om som

$$\bar{h} - \beta \sigma_h = 0 \quad (3-28)$$

och (3-24) och (3-26) insättes i (3-28) erhålles

$$g(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} (\bar{x}_i - x_i^* - \alpha_i \beta \sigma_i) = 0 \quad (3-29)$$

Den första termen är noll eftersom punkten $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ligger på gränskurvan $g = 0$. Den andra termen blir noll om

$$x_i^* = \bar{x}_i - \alpha_i \beta \sigma_i \quad (3-30)$$

Lineariseringspunkten erhålles alltså genom att lösa ekvationssystemet (3-30). Punkten kan också erhållas genom att skala om variablerna till nya variabler y_i med medelvärde noll och standardavvikelse ett dvs

$$y_i = \frac{x_i - \bar{x}_i}{\sigma_i} \quad (3-31)$$

Om de nya variablerna används i (3-24) och (3-25) och insättes i (3-28) erhålles

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial y_i} y_i^* - \beta \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial y_i}\right)^2} = 0 \quad (3-32)$$

Den geometriska innebörden av ekv. (3-32) framgår av det följande. Om ett plan i koordinatsystemet

$(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ är givet genom ekvationen

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \dots + a_n y_n - A = 0 \quad \text{så är vektorn}$$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ en normal till planet och vektorn

$$[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n] / \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \quad \text{en enhetsnormal till samma}$$

plan. Avståndet p_0 från en punkt P_1 till planet kan alltså skrivas som

$$p_0 = \left| (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \dots + a_n y_n - A) / \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \right| \quad (3-33)$$

där $(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ är P_1 's koordinater.

Speciellt om punkten P_1 är origo 0 erhålles

$$p_0 = \left| A / \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \right| \quad (3-34)$$

p_0 kan även skrivas i vektorform som

$$\bar{p}_0 = |p_0| [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n] / \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \quad (3-35)$$

och enhetsnormalen i formen

$$[\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \cos \alpha_3, \dots, \cos \alpha_n] \quad (3-36)$$

Planets ekvation kan även uttryckas i normalformen

$$\bar{V} \mid \bar{OP} = p_0 \quad (3-37)$$

där $\bar{V}$ är enhetsnormal till planet innebärande att planet är den mängd punkter P för vilka skalärprodukten

$$\bar{V} \mid \bar{OP} \quad (O \text{ är origo}) \text{ är konstant.}$$

Omskrives ekv (3-37) med hjälp av ekv (3-34) erhålles

$$\sum_{i=1}^n \cos \alpha_i y_i = A / \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \quad (3-38)$$

Jämföres denna ekv med ekv (3-32) inses att β kan tolkas som det vinkelräta avståndet från origo till lineariseringspunkten och uttrycken

$$\alpha_i = \frac{\partial g}{\partial y_i} / \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial y_i} \right)^2} \quad (3-39)$$

kan översättas till riktningscosiner för lineariseringspunkten.

Ett enkelt exempel beskriver innebörden av det resonemang som gjorts. I avsikt att få ett beskrivande men ändå enkelt exempel väljes här en icke-linjär funktion g beroende av endast två variabler.

Funktionen g (ekv 3-21) väljs här till

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 = 0 \quad (3-40)$$

Om x_1 och x_2 här tillåtes innehålla vissa konstanter kan uttrycket g motsvara den mekaniska formuleringen av ett bucklingsproblem för en fyrsidigt upplagd stålplåt med stort slankhetstal där endast plåttjockleken (x_1) betraktas som variabel. Plåtens last är jämnt fördelad tryckpåkning (x_2).

Alternativt kan g i detta fall också betyda formuleringen för en rektangulär böjmomentbelastad homogen balk där materialhållfasthet och bredd betraktas som deterministiska men balkhöjden (x_1) är stokastisk. Lasteffekten (momentet x_2) är också stokastisk.

Bärförmågan, karakteriserad av x_1 , antages ha medelvärdet 3 och standardavvikelsen 0.5. För lasteffekten (x_2) är motsvarande värden 1 resp 0.25.

I FIG 3-12 visas en grafisk bild av dimensioneringsproblemet. Kurvan $g(x_1, x_2) = 0$ är gränskurvan mellan det säkra området och det område som svarar mot skada för det gränstillstånd funktionen g representerar.

I FIG 3-13 illustreras effekten av variabeltransformationen

$$Y_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma_i}$$

dvs

$$Y_1 = \frac{x_1 - 3}{0.5} \quad (3-41)$$

och

$$Y_2 = \frac{x_2 - 1}{0.25} \quad (3-42)$$

Funktionen $g(X_1, X_2) = X_1^2 - X_2$ transformeras till

$$g = (Y_1, Y_2) = 0.25 Y_1^2 + 3 Y_1 - 0.25 Y_2 + 8 = 0 \quad (3-43)$$

vilken också är inritad i figuren.

Säkerhetsmättet β kan nu lätt erhållas ur figuren genom att mäta det minsta avståndet mellan origo och gränskurvan $g(Y_1, Y_2) = 0$

Att detta är riktigt inses genom att genomföra de deriveringar som angivits tidigare dvs

$$\frac{\partial g}{\partial Y_1} = 0.5 Y_1 + 3 \quad (3-44)$$

$$\frac{\partial g}{\partial Y_2} = -0.25 \quad (3-45)$$

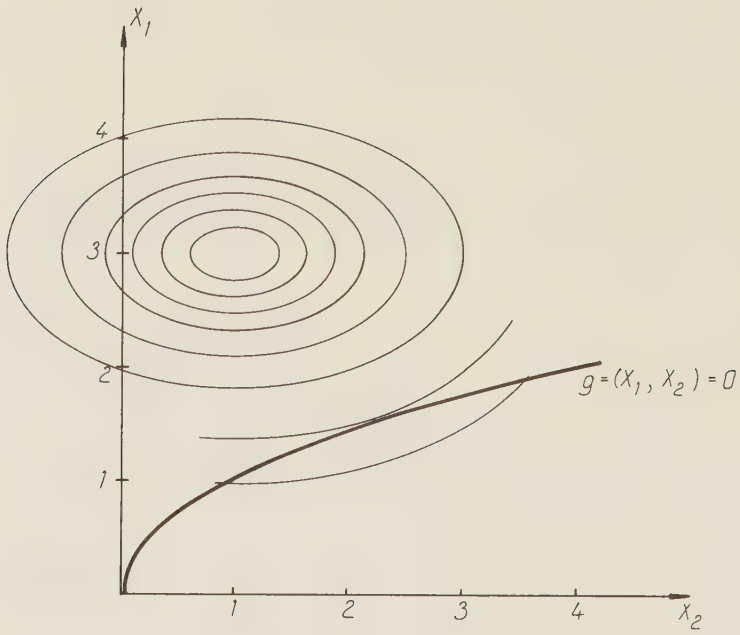


FIG 3 - 12 Grafisk representation av ett statistiskt dimensioneringsproblem.

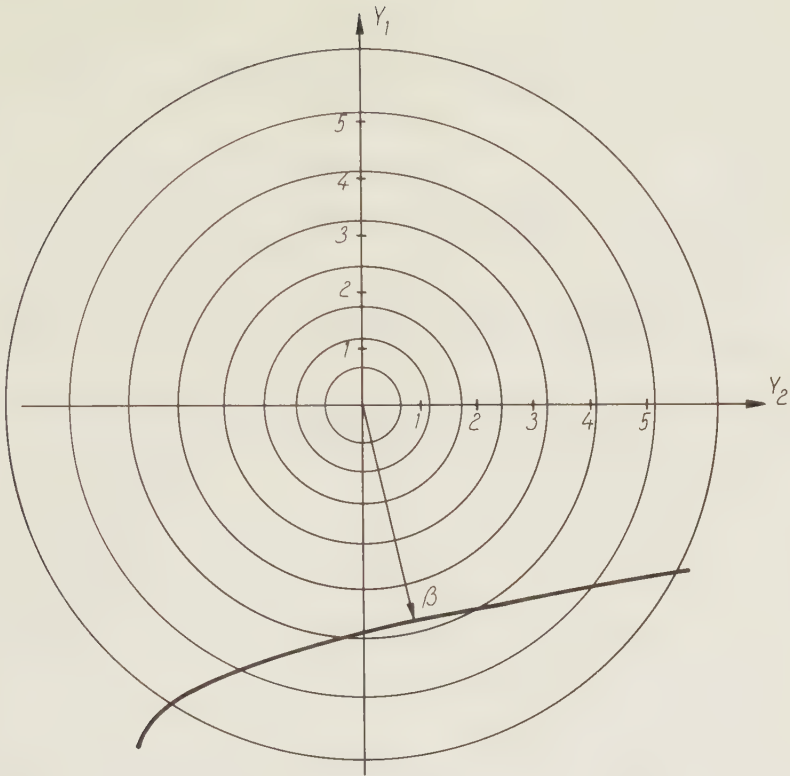


FIG 3-13 Effekt av variabeltransformation som centrerar variablerna.

vilket ger

$$\alpha_1 = (0.5 Y_1^* + 3) / \sqrt{(0.5 Y_1^* + 3)^2 + 0.25^2} \quad (3-46)$$

och

$$\alpha_2 = -0.25 / \sqrt{(0.5 Y_1^* + 3)^2 + 0.25^2} \quad (3-47)$$

eftersom derivationsvärdena ska evalveras i lineariseringspunkten (Y_1^*, Y_2^*) .

Dimensioneringsvärdena Y_1^* resp Y_2^* erhålles nu ur uttrycket

$$Y_i^* = \bar{Y}_i - \alpha_i / \beta \sigma_i \quad (3-48)$$

vilket ger

$$Y_1^* = -\alpha_1 / \beta \quad (3-49)$$

och

$$Y_2^* = -\alpha_2 / \beta \quad (3-50)$$

vilket uträknat med hjälp av ekv (3-46) och (3-47) ger

$$\frac{Y_1^*}{Y_2^*} = \frac{-0.5 Y_1^* - 3}{0.25} \quad (3-51)$$

Under bivillkoret att $g(Y_1^*, Y_2^*) = 0$, (se ekv (3-43)) dvs

$$Y_2^* = Y_1^{*2} + 12 Y_1 + 32 \quad (3-52)$$

erhålles efter omskrivning av ekv (3-51)

$$2 Y_1^{*3} + 36 Y_1^{*2} + 208 Y_1^* + 384 = -Y_1^* \quad (3-53)$$

Passningsräkning av ekv (3-53) ger

$$Y_1^* = -3.795 \quad (3-54)$$

och Y_2^* erhålles ur ekv (3-52) till

$$Y_2^* = 0.862 \quad (3-55)$$

Riktningkoefficienten för normalen till kurvan $g(Y_1, Y_2) = 0$ i punkten (Y_1^*, Y_2^*) kan därefter beräknas till

$$\left[-\frac{\partial Y_2}{\partial Y_1} \right]_{(Y_1^*, Y_2^*)} = -2 Y_1^* - 12 = -4.41$$

Om normalen går genom origo ska Y_1^* erhållas om Y_2^* insättes i normalens ekvation. Göres detta erhålles

$$Y_1^* = 0.862 (-4.41) = -3.80$$

vilket är snarlikt nära -3.795.

I mer realistiska fall med fler variabler och ett mer komplicerat utseende hos gränskurvan g måste normalt en minimeringsprocess tillämpas för att hitta lineariseringspunkten. Matematiskt formulerat är problemet att hitta

$$\beta^* = \min [\beta(Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, \dots, Y_n^*)] \quad (3-56)$$

under bivillkoret att

$$g(Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*, \dots, Y_n^*) = 0 \quad (3-57)$$

vilket lämpligen utföres i dator.

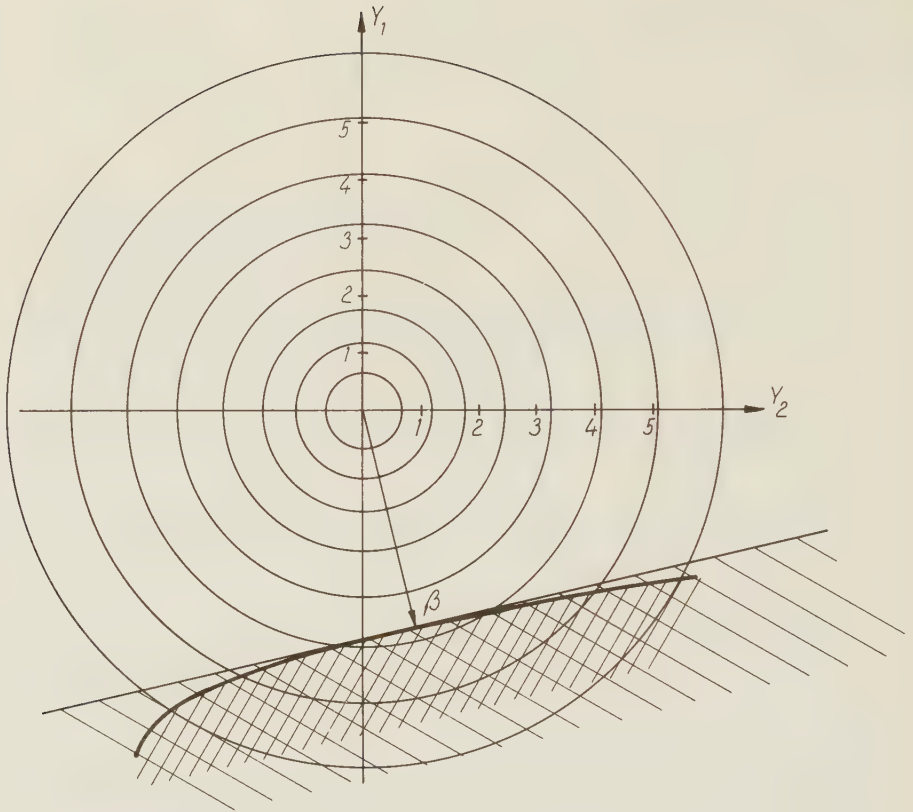


FIG 3-14 Skaderisk motsvarad av säkerhetsmåttet β resp gränskurvan g .

I de fall gränskurvan har en sådan form att lokala minima kan förekomma måste flera startpunkter väljas för att ett globalt minimum ska kunna hittas.

Det intressanta innehållet i säkerhetsindex β är emellertid dess motsvarighet i skaderisk. I FIG (3-14) visas återigen dimensioneringsituationen i den transformerade variabelformen men med lineariseringsplanet (vinkelrätt mot papperet) inritat.

Skaderisken (representerad av β) svarar mot den volymandel som avskäres från den totala volymen av vertikalplanet genom lineariseringspunkten (det streckade området i FIG (3-14)). Den "verkliga" skaderisken utgöres däremot av integralen över det område som begränsas av gränskurvan g (det rutade området i FIG (3-14)). För gränskurvor av den form (konkav) som visas i FIG (3-14) ger således den beskrivna representationen en överskattning av den beräknade skaderisken. För andra typer av gränskurvor t.ex. den linjära i FIG (3-15) blir representationen exakt medan den för konkava kurvor enligt FIG (3-16) blir en underskattning. För konvexa gränskurvor erhålles dock en största gräns för skaderiskens storlek genom att beräkna volymen utanför en cirkel med radien $\beta_{\min}$ enligt FIG (3-17). Den beräknade skaderisken, svarande mot säkerhetsindex β , beror naturligtvis på utseendet hos den simultana frekvensfunktionen för (Y_1, Y_2) . Om de ingående variablerna är normalfördelade blir den simultana frekvensfunktionen en flerdimensionell normalfördelning, även för 3 eller fler dimensioner.

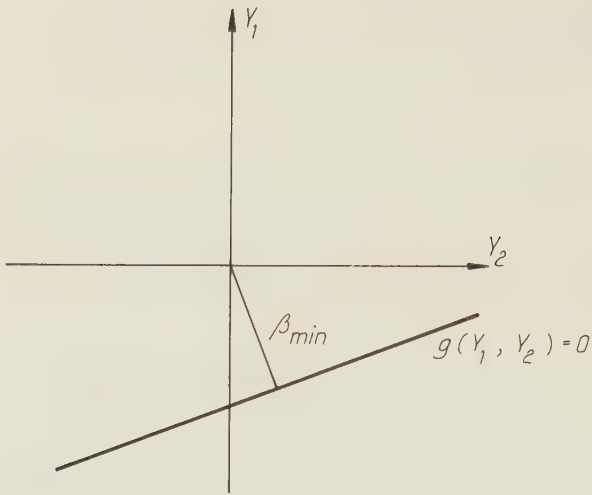


FIG 3-15 Linjär gränskurva.

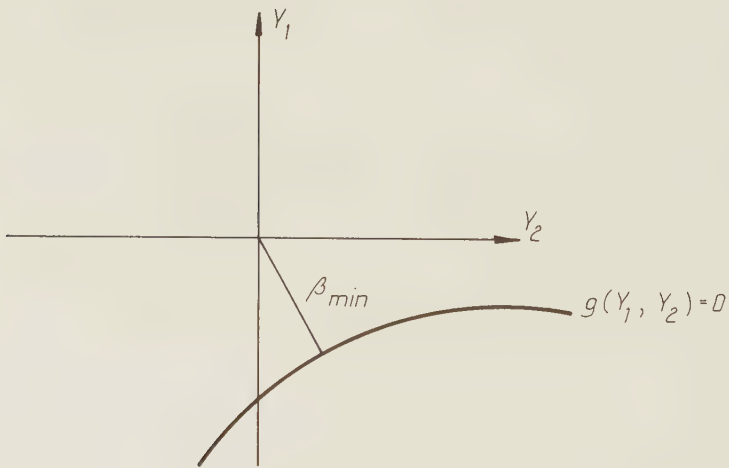


FIG 3-16 Konkav gränskurva.

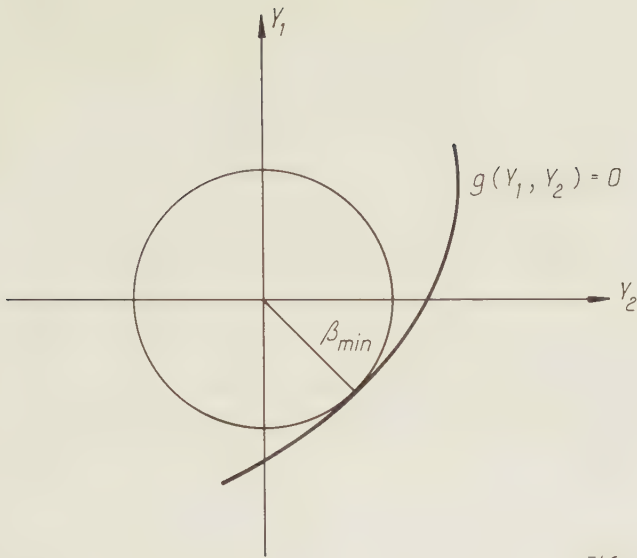


FIG 6

FIG 3-17 Konvex gränskurva.

I så fall blir skaderisken p_f

$$p_f = 1 - \phi(\beta) \quad (3-58)$$

där ϕ är normalfördelningens fördelningsfunktion.

Resultatet kan lätt inses i det tvådimensionella fallet (se FIG 3-14) genom att utnyttja det förhållandet att varje vertikalsnitt i en tvådimensionell normalfördelning utgör en endimensionell normalfördelning. Lägges snittet längs β -linjen i FIG 3-14 inses riktigheten av ekv (3-58).

För konkava gränskurvor gäller alltså att

$$0 \leq p_f \leq 1 - \phi(\beta) \quad (3-59)$$

I fallet med konvex gränskurva blir motsvarande olikhet

$$1 - \phi(\beta) \leq p_F \leq 1 - \chi_n^2(\beta^2) \quad (3-60)$$

där χ^2 är chi-två fördelningens fördelningsfunktion

n är antalet frihetsgrader

β är argumentet

Resultatet förklaras nedan för det tvådimensionella fallet.

Avståndet r från origo till en punkt i planet (Y_1, Y_2) kan skrivas som

$$r = \sqrt{Y_1^2 + Y_2^2} \quad (3-61)$$

dvs.

$$r^2 = Y_1^2 + Y_2^2 \quad (3-62)$$

Eftersom Y_1 och Y_2 tillhör standardiserad normalfördelning och är oberoende så gäller att r^2 tillhör chi-två fördelningen med två frihetsgrader. Sannolikheten att r^2 är mindre än β^2 tecknas då som

$$P(r^2 \leq \beta^2) = \chi_2^2(\beta^2) \quad (3-63)$$

varför sannolikheten att hamna utanför cirkeln med radien β blir

$$1 - \chi_2^2(\beta^2) \quad (3-64)$$

I de fall de ingående variablerna inte är normalfördelade, vilket för övrigt är det mest vanliga, kan en approximation tillämpas.

Ett sätt är att låta den approximerande normalfördelningen ha samma medelvärde som den ursprungliga icke-normala. För att samma fraktil ska avskäras i dimensioneringspunkten oavsett betraktad fördelning krävs att standardavvikelsen σ_1 för normalfördelningen ges värdet

$$\sigma_1 = \sigma \frac{F^{-1}(P) - m}{\phi^{-1}(\rho) - m} \quad (3-65)$$

där σ är den ursprungliga fördelningens standardavvikelse
 F^{-1} är inversen till den ursprungliga fördelningen
 ϕ^{-1} är normalfördelningens invers
 m är variabelns medelvärde

Ett annat sätt är att låta den nya approximationen styras av villkoren att inte bara fördelningsfunktionernas värden ska vara lika i dimensioneringspunkten utan även resp. frekvensfunktioners värden.

Om approximationens parametrar betecknas med m_1 (medelvärde) och σ_1 (standardavvikelse) erhålles

$$F(x^*) = \phi\left(\frac{x^* - m_1}{\sigma_1}\right) \quad (3-66)$$

och

$$f(x^*) = \varphi\left(\frac{x^* - m_1}{\sigma_1}\right) \frac{1}{\sigma_1} \quad (3-67)$$

där F som tidigare är den ursprungliga fördelningens fördelningsfunktion

f är motsvarande frekvensfunktion och

ϕ är normalfördelningens frekvensfunktion.

Ekv (3-66) ger

$$\frac{x^* - m_1}{\sigma_1} = \phi^{-1}[F(x^*)] \quad (3-68)$$

Efter insättning i (3-67) erhålles den nya standardavvikelsen till

$$\sigma_1 = \frac{\varphi[\phi^{-1}[F(x^*)]]}{f(x^*)} \quad (3-69)$$

Det nya medelvärde m_1 erhålles därefter genom insättning av ekv. (3-69) i ekv (3-68) vilket ger

$$m_1 = x^* - \frac{\varphi \left[\phi^{-1} [F(x^*)] \right] \cdot \phi^{-1} [F(x^*)]}{f(x^*)} \quad (3-70)$$

Ovanstående beskrivning visar att det är teoretiskt möjligt att behandla fall med godtyckligt utseende hos de ingående variablernas fördelningar under förutsättning av att dessa är okorrelerade. Om så inte är fallet, men korrelationen mellan variablerna är känd, kan alltid en ortogonal transformation göras så att de nya variablerna blir okorrelerade. I FIG 3-18 illustreras en sådan transformation i två dimensioner.

Hittills beskriven metodik i nivå II kräver i de flesta fall tillgång till dator då lösningen till problemet måste itereras fram. Paloheimos modifierade metod bygger som tidigare nämnts på att vikterna α_i diskreterats i ett fåtal värden. Detta är möjligt då dimensioneringspunktens läge är relativt okänsligt för en måttlig avvikelse än α_i så länge villkoret

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1 \quad \text{är uppfyllt.}$$

Efter en indelning av den mekaniska formuleringen g i underfunktioner kan α_i -värden tagas ur en tabell. Valet av α_i -värden styrs av de ingående variablernas inbördes inverkan på underfunktionerna som kan vara av formen summa, produkt eller kvot av variabler. Ett enkelt exempel beskriver tillvägagångssättet. Antag att funktionen g är

$$g = x_1 \cdot x_2 - (x_3 + x_4) \quad (3-71)$$

där g kan tänkas beskriva formuleringen för ett böjmomentbelastat underarmerat betongtvärsnitt i förenklad form och där

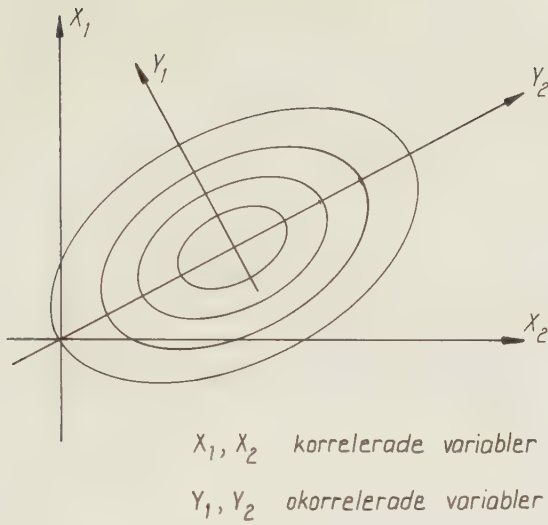


FIG 3-18 Exemplifiering av variabeltransformation från korrelerade till okorrelerade variabler.

x_1 är dragkraft i armeringen

x_2 är inre hävarmen

x_3 är moment av egenvikt

x_4 är moment av nyttolast

Lämpliga underfunktioner är $x_1 \cdot x_2$ resp. $x_3 + x_4$. Inverkan av x_1 resp. x_2 på produkten $x_1 \cdot x_2$ avgörs av värdet på kvoten $\beta_1 \delta_1 / \beta_2 \delta_2$ (δ = variationskoefficient). Motsvarande inverkan på funktionen $x_3 + x_4$ bestäms av kvoten $\beta_3 \sigma_3 / \beta_4 \sigma_4$. Efter numerisk beräkning av dessa kvoter hämtas motsvarande α -värden ur nedanstående uppställning.

Kvotens		< 5	< 1.5	< 0.67	
värde	> 5	> 1.5	> 0.67	> 0.20	< 0.2
α -värde för täljaren	1.0	0.930	0.711	0.385	0
α -värde för nämnaren	0	0.385	0.711	0.930	1.0

I Paloheimos metod tas även hänsyn till fördelningen på så sätt att olika β -värden kan användas. För att belysa detta samt göra exemplet fullständigt tilldelas de ingående variablerna följande fördelningar och parametervärden

		Fördelning
$\bar{x}_1$ är okänt och sökes	$\delta_1 = 0.05$	lognormal
$\bar{x}_2 = 0.4$ m	$\delta_2 = 0.03$	normal
$\bar{x}_3 = 100$ kNm	$\delta_3 = 0.1$	normal
$\bar{x}_4 = 50$ kNm	$\delta_4 = 0.4$	extrem I

Aktuell beräknad skaderisk sättes till 10^{-5} . Motsvarande fraktil för de olika fördelningarna ger följande β -värden.

$$\beta_1 = 3.18$$

$$\beta_2 = 4.27$$

$$\beta_3 = 4.27$$

$$\beta_4 = 8.53$$

α -värden ges därefter ur den tidigare uppställningen.

$$\frac{\beta_1 \sigma_1}{\beta_2 \sigma_2} = 1.24 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0.711$$

$$\frac{-\beta_3 \sigma_3}{-\beta_4 \sigma_4} = 0.25 \rightarrow \alpha_3 = -0.385, \alpha_4 = -0.930$$

Dimensioneringsvärdena kan därefter beräknas enligt uttrycket

$$x_i^* = \bar{x}_i - \beta_i \alpha_i \sigma_i \quad (3-72)$$

vilket ger

$$x_2^* = 0.4 - 4.27 \cdot 0.711 \cdot 0.012 = 0.364$$

$$x_3^* = 100 + 4.27 \cdot 0.385 \cdot 10 = 116.44$$

$$x_4^* = 50 + 8.53 \cdot 0.930 \cdot 20 = 158.66$$

Värdet på x_1^* ges därefter ur uttrycket

$$g(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) = 0 \quad (3-73)$$

vilket ger

$$x_1^* = 275.1 / 0.364 = 755.77$$

vilket i sin tur ger det sökta värdet på $\bar{x}_1$

$$\bar{x} (1 - 3.18 \cdot 0.711 \cdot 0.05) = 755.77$$

vilket uträknat blir

$$\bar{x}_1 = 852.1$$

Om balken ska armeras med ϕ 16 ks 60 som förutsättes ha värdet 670 MN/m² som skattat medelvärde på sträckgränsen så erhålles armeringsarean till

$$A_s = 1.27 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

vilket motsvarar 7 st ϕ 16.

4 BÄRFÖRMÅGA

4.1 Begreppet bärförmåga

En ofta använd definition på bärförmåga i ett snitt i en konstruktion är:

"Ett snitt har nått sin yttersta gräns vad gäller hållfasthet om det inte längre kan motstå ändringar i påverkande lasteffekt utan att samtidigt ändra geometri".

Bärförmågan hänför sig i detta fall till ett brottillstånd. Det är fördelaktigt att även definiera andra tillstånd som konstruktionen kan befinna sig i och som kan tilldelas sannolikheter. Exempel på sådana gränstillstånd är progressionsgränstillstånd och bruksgränstillstånd. Gränsen för bärförmågan är därför knutet till ett visst gränstillstånd och beräknad skaderisk anger då sannolikheten för att den aktuella konstruktionen inträder i det betraktade gränstillståndet.

Dimensioneringskravet blir att finna en konstruktion som för alla gällande gränstillstånd uppfyller uppställda krav. Ett av gränstillstånden blir normalt avgörande för konstruktionens utformning. I vissa fall kan krav i olika gränstillstånd påverka konstruktionsutformningen i olika riktningar. Exempelvis kan, för en tornliknande konstruktion med stor andel massa på hög höjd, kravet i bruksgränstillståndet ge ett minimivärde på konstruktionens styvhet. Kravet i brottgränstillståndet, t.ex. då konstruktionen belastas med jordbävningsslast, kan å andra sidan ge ett maximivärde på bärande pelares styvheter. Bärförmågan är således inget entydigt begrepp utan måste kompletteras med uppgift om vad som avses.

4.2 Sammansättning av hållfasthets- och måttparametrar till bärförmåga

Olika variabler och parametrar bestämmer bärförmågans storlek hos en konstruktion. Teoretiskt sett existerar en mängd faktorer som påverkar bärförmågans storlek. Ta som exempel på bärförmåga

maximal kraft i en dragen armeringsstång då ett tvärsnitt i denna nått brottgränsen. Bestämmande för kraftens storlek är faktorer som måttavvikelser, sprickfördelning, lokala fel i materialets atomgitter, förekomst av slaggstärk etc. De olika faktorernas inverkan kan vara svåra att separera. Dessutom, förutsatt att alla fördelningarna går att bestämma, blir den matematiska kopplingen till en beräkningsmässig bärförmåga mer komplicerad ju fler variabler som ingår. Det är därför bekvämt att sammanlänka olika faktorer till en faktor. I fallet dragen armeringsstång kan det räcka med två faktorer, tvärsnittsytan och hållfasthet (påkänning). Hållfastheten erhålles genom dragprov, tvärsnittsytan genom uppmätning. Av respektive fördelningar bildas den simultana fördelningen för bärförmågan dvs.

$$R = M \cdot L \quad (4-1)$$

där

R är bärförmåga (resistance)

M är materialhållfasthet (material)

L är dimension (length)

vilken tillhör den minst komplicerade av upptänkliga kombinationer.

Vanligtvis anges ett armeringsståls data i form av histogram för undre sträckgränsen som erhållits genom division av erhållen dragkraft med nominell stålarea. I detta fall erhålles naturligtvis fördelningen för bärförmågan, skalad med tvärsnittsarean, direkt ur histogrammet.

Om, för ett annat fall av studerad bärförmåga, faktorerna M och L är två oberoende stokastiska variabler med respektive fördelningar bestämda kan den simultana frekvensfunktionen lätt tecknas som

$$f_{M,L}(x,y) = f_M(x) \cdot f_L(y) \quad (4-2)$$

Problem uppstår emellertid då fraktiler av bärformågan R ska beräknas ur den simultana frekvensfunktionen. T.ex. är

$$P = (R \leq Z) = P(M \cdot L \leq Z) = \iint_{M \cdot L \leq Z} f_M(x) f_L(y) dx dy \quad (4-3)$$

Grafiskt representeras den sökta sannolikheten av volymen under den simultana frekvensfunktionen i det streckade området i FIG (4 - 1) för $Z > 0$. Den analytiska metoden att beräkna värden ur ekv. (4 - 3) är möjlig endast i några få specialfall. För det fall att både M och L är lognormalfördelade blir även bärformågan R lognormalfördelad och analytisk behandling är möjlig. Har M och L andra fördelningar, enpunktsfördelningar undantagna, så måste sannolikheter beräknas med numeriska metoder ur ekv. (4 - 3).

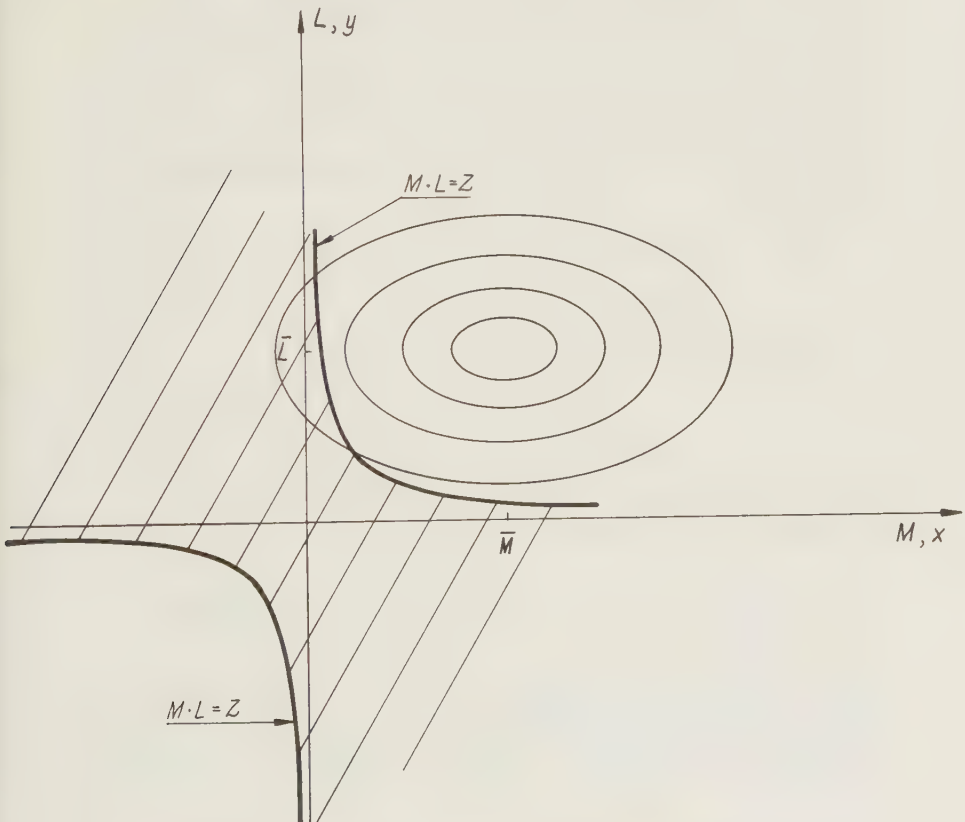


FIG 4-1 Fördelning för en produkt av två oberoende stokastiska variabler.

Bärförmåga, eller en modell för bärförmåga, sammansättes normalt av ett flertal variabler. Det uttryck för bärförmåga som Cornell införde dvs.

$$R = M \cdot L \cdot I \quad (4-4)$$

där

I är en korrektionsfaktor för osäkerheter i beräkningsmodellen,

är en mycket förenklad bild av verkliga förhållanden. Materialparametern M är exempelvis ofta en storhet härledd ur erhållna försöksresultat och dimensionsparametern L kan anta olika värden beroende på vilket stadium den aktuella konstruktionen befinner sig i.

Materialparametern M kan antas kunna tecknas som $M = C \cdot m$, där M exempelvis kan uppfattas som draghållfastheten hos betong, m som tryckhållfastheten hos betong och C en funktion eller faktor som överför tryckhållfasthet till draghållfasthet. Om M, C och m bestäms genom provningar erhålles resultat bl.a. i form av variationskoefficienter. För det fall att C och m är oberoende erhålles approximativt att

$$\sigma_M = \sqrt{\sigma_C^2 + \sigma_m^2} \quad (4-5)$$

Approximationen blir bättre ju mindre σ_C och σ_m är.

Helt klart beror variationen hos M av hur "bra" överföringsfunktionen C är. I det ovan beskrivna fallet, ekv. (4 - 5), är inverkan av variationer i överföringsfunktionen likvärdig med variationer i materialhållfastheten.

Det är önskvärt att erhålla så låga värden på σ_M som möjligt. I det ovan beskrivna fallet kan detta göras antingen genom att skärpa precisionen då det gäller materialhållfasthet (tillverkning och kontroll) eller genom att förbättra teorin (överföringsfunktionen C). Förbättringsinsatser på de bägge delarna inverkar

likvärdigt på den totala variationskoefficienten. Ökad precision när det gäller materialhållfasthet medför dock ökade kostnader för den färdiga produkten. Ökad precision vad gäller teoretiska beräkningar medför högre grad av komplexitet och därmed ökade kostnader för beräkningsarbete. Eftersom variationer hos bärförmåga ska vägas mot variationer hos övriga faktorer t.ex. laster är det inte ekonomiskt försvarbart att genom olika åtgärder minska variationen hos bärförmåga hur mycket som helst. En socioekonomisk analys av kostnadsproblematiken kan utpeka ett optimum i detta avseende.

Andra fall finnes där en av ingående faktorer dominerar. Anta att dimensionsparametern L betecknar tröghetsmomentet hos en balk med rektangulär tvärsnittsform dvs.

$$L = \frac{b h^3}{12} \quad (4 - 6)$$

där b och h är bredd resp. höjd hos tvärsnittet.

Variansen för L kan då tecknas som

$$V(L) = \frac{1}{144} V(b h^3) \quad (4 - 7)$$

vilket i omskriven form enligt Gauss approximationsformel blir

$$V(L) \approx \frac{1}{144} \left[\left[\bar{h}^3 \right]^2 V(b) + \left[3 \bar{h}^2 \bar{b} \right]^2 V(h) \right] \quad (4 - 8)$$

om h och b är oberoende.

Uttryckt i variationskoefficienter erhålles

$$\delta_L = \sqrt{\delta_b^2 + 9 \delta_h^2} \quad (4 - 9)$$

I detta fall är inverkan av variationer hos de ingående variablerna som väntat inte likvärdiga utan variationer i tvärsnittshöjd dominerar. Minskade toleranser i tvärsnittsmått ger naturligtvis störst utslag för balkhöjd, där i det ovan beskrivna

exemplet inverkan på den totala variationskoefficienten av variationen i balkhöjd är flera gånger större än inverkan av variationer i balkbredd.

I det i ekv. (4 - 4) uppställda sambandet är en korrektionsfaktor I införd. I denna faktor ska inrymmas de osäkerheter som införes genom beräkningsmodellen. Med få undantag är de konstruktioner som beräknas så komplicerade att deras funktionssätt vid lastupptagning måste beskrivas med mer eller mindre enkla modeller. Dessa modeller ger ofta en systematisk avvikelse från de "rätta" värdena beroende på att modellen inte beaktar alla inverkanse faktorer och därför ger värden på "säkra sidan". Beräkningsmodellen kan tänkas fungera statistiskt på i princip samma sätt som den tidigare beskrivna överföringsfunktionen. För beräkningsmodellens vidkommande är det dock svårt att bedöma hur stort bidrag de olika ingående variablerna ger till den totala säkerhetsmarginalen som finns inbyggd i modellen. Totalt innehållen säkerhetsmarginal kan bedömas genom att beräkna skillnader, uttryckt i medelvärden och standardavvikelser, mellan värden erhållna genom experimentella försök och värden erhållna genom teoretisk beräkning. Det sätt på vilket beräkningsreglerna korrigeras för att överensstämja med verkliga förhållanden varierar från fall till fall. Därmed beaktas även osäkerheter i beräkningsreglerna på olika sätt och man kan inte ge ett generellt mått på den inverkan på beräknad bärförmåga som osäkerheter i beräkningsmodellen medför.

4.3 Ofta förekommande typer av samband

En inventering av de normalt förekommande uttrycken för bärförmåga visar att dessa kan delas upp i olika delar där varje del innehåller grupper som i princip kan skrivas som

$$M \cdot L \cdot X \cdot I \cdot C$$

(4 - 10)

där M är materialparameter

L är dimensionsparameter

X är en parameter som inte direkt kan hänföras till någon av grupperna M , L , eller I

I är en osäkerhetsfaktor som beaktar osäkerheter i beräkningsmodellen

C är en konstant

En uppdelning av den allmänt skrivna funktionen

$$g = f(M_1, M_2, \dots L_1, L_2, \dots X_1, X_2, \dots I_1, I_2, \dots C) \quad (4 - 11)$$

i dylika grupper är till god hjälp vid beräkning med bl.a. Paloheimos metod då proceduren med viktning av olika α -värden blir i hög grad förenklad om uppdelning av funktionen kan göras.

Ta som exempel uttrycket för brottmomentet i en underarmerad betongbalk skrivet med vedertagna beteckningar.

$$M_u = f_{st} A_s d \left(1 - \frac{f_{st} A_s}{2 \cdot b \cdot d f_{cc}} \right) \quad (4 - 12)$$

I omskriven form kan uttrycket skrivas som

$$R = M_1 \left(L_1 - \frac{M_1 C}{M_2 L_2} \right) \quad (4 - 13)$$

där R är bärförmåga (moment)

M_1 är dragkraft i armeringen

L_1 är effektiv höjd

M_2 är betongens tryckhållfasthet

L_2 är balkbredd

C är en konstant (= 0.5)

Alternativt kan brottmomentet uttryckas som

$$R = M_1 L_1 X_1 I_1 \quad (4 - 14)$$

där R , M_1 , L_1 har samma betydelse som ovan

X_1 betecknar faktorn $1 - \frac{\omega}{2}$

I_1 är en faktor som tar hänsyn till variationer och osäkerheter i beräkningsmodellens förutsättningar.

Uttryckets formella uppbyggnad är i stort sett detsamma som redovisades av Cornell 1969.

Variansen $V(R)$ för de två uttrycken kan beräknas med Gauss approximationsformel till

$$V(R) = \left[\bar{L}_1 - \frac{2\bar{M}_1 C}{\bar{M}_2 \bar{L}_2} \right]^2 V(M_1) + \bar{M}_1^2 V(L_1) + \left[\frac{\bar{M}_1^2 C}{\bar{L}_2 \bar{M}_2^2} \right]^2 V(M_2) + \left[\frac{\bar{M}_1^2 C}{\bar{M}_2 \bar{L}_2^2} \right]^2 V(L_2) \quad (4 - 15)$$

respektive

$$V(R) = \left[L_1 X_1 I_1 \right]^2 V(M_1) + \left[M_1 X_1 I_1 \right]^2 V(L_1) + \left[M_1 L_1 I_1 \right]^2 V(X_1) + \left[M_1 L_1 X_1 \right]^2 V(I_1) \quad (4 - 16)$$

för det fall att alla variabler är okorrelerade.

Motsvarande variationskoefficienter erhålles genom division av standardavvikelsen med bärförmågans medelvärde även det framräknat enligt Gauss approximationsformel.

Variationskoefficienterna erhålles till

$$\sigma_R = \sqrt{\left[\frac{\bar{L}_1 - \frac{2\bar{M}_1 C}{\bar{M}_2 \bar{L}_2}}{\bar{L}_1 - \frac{\bar{M}_1 C}{\bar{M}_2 \bar{L}_2}} \right]^2 \sigma_{M_1}^2 + \left[\frac{1}{1 - \frac{\bar{M}_1 C}{\bar{M}_2 \bar{L}_2 \bar{L}_1}} \right]^2 \sigma_{L_1}^2 +$$

(4 - 17)

$$+ \left[\frac{1}{\frac{\bar{M}_2 \bar{L}_1 \bar{L}_2}{\bar{M}_1 C} - 1} \right]^2 \sigma_{M_2}^2 + \left[\frac{1}{\frac{\bar{L}_2 \bar{M}_2 \bar{L}_1}{\bar{M}_1 C} - 1} \right]^2 \sigma_{L_2}^2$$

för det första fallet och

$$\sigma_R = \sqrt{\sigma_{M_1}^2 + \sigma_{L_1}^2 + \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{I_1}^2}$$

(4 - 18)

i det andra fallet.

Ett enkelt exempel beskriver skillnaderna mellan de två uttrycken.

Ett betongbalktvärsnitt armerat med 4 ϕ 16 ks 60 antas ha följande värden som bestämmer brottmomentets storlek, här betecknat R.

$$\bar{M}_1 = 804 \cdot 670 \text{ N} \quad (804 = \text{armeringens tvärsnittsarea})$$

$$\delta_M = 0.05$$

$$\bar{L}_1 = 0.4 \text{ m}$$

$$\delta_{L_1} = 0.04$$

$$\bar{M}_2 = 20 \text{ MPa}$$

$$\delta_{M_2} = 0.12$$

$$\bar{L}_2 = 0.3 \text{ m}$$

$$\delta_{L_2} = 0.02$$

$$\bar{X}_1 = 0.9$$

$$\delta_{X_1} = 0.25$$

$$\bar{I}_1 = 1.0$$

$$\delta_{I_1} = 0.05$$

Medelvärde och variationskoefficient för bärförmågan uttryckt genom ekv. (4 - 13) erhålles till

$$\bar{R} = 0.539 \left(0.4 - \frac{0.539 \cdot 0.5}{20 \cdot 0.3} \right) = 0.191 \text{ MNm} \quad (4 - 19)$$

resp.

$$\sigma_R = \sqrt{0.763 \cdot 0.05^2 + 1.27 \cdot 0.04^2 + 0.016 \cdot 0.12^2 + 0.016 \cdot 0.02^2} = 0.065 \quad (4 - 20)$$

Motsvarande för bärförmågan uttryckt genom ekv. (4 - 14) erhålles till

$$\bar{R} = 0.539 \cdot 0.4 \cdot 0.9 \cdot 1 = 0.194 \text{ MNm} \quad (4 - 21)$$

resp.

$$\sigma_R = \sqrt{0.05^2 + 0.04^2 + 0.25^2 + 0.05^2} = 0.069 \quad (4 - 22)$$

Resultaten avviker inte speciellt mycket från varandra i det redovisade exemplet. Därmed är inte sagt att modellen med den enklare uppbyggnaden för alla fall ger ungefär samma resultat som den mer komplicerade. Avsikten med exemplet är endast att beskriva två beräkningsuttryck samt ange hur variationskoefficienterna kan erhållas.

För ett tryckt och samtidigt momentbelastat ståltvärsnitt där normalkraft och moment är direkt beroende av varandra kan bärförmågan R , i detta fall normalkraften, tecknas som

$$R = \frac{f_s \cdot A}{1 + \frac{eA}{W}} \quad (4 - 23)$$

där f_s är materialets sträckgräns

A är tvärsnittsarean

e är lastexcentricitet

W är böjmotstånd

under förutsättning av att elastiskt tillstånd antas råda.

Variansen för bärförmågan kan nu beräknas till

$$\begin{aligned}
 V(R) = & \left[\frac{\bar{A}}{1 + \frac{\bar{e}\bar{A}}{\bar{W}}} \right]^2 V(\bar{f}_S) + \left[\frac{\bar{f}_S}{(1 + \frac{\bar{e}\bar{A}}{\bar{W}})^2} \right]^2 V(A) + \left[-\frac{\bar{f}_S \bar{A}^2}{\bar{W}(1 + \frac{\bar{e}\bar{A}}{\bar{W}})^2} \right]^2 \\
 & \cdot V(e) + \left[\frac{\bar{f}_S \bar{A}^2 \bar{e}}{\bar{W}^2 (1 + \frac{\bar{e}\bar{A}}{\bar{W}})^2} \right]^2 V(W) + 2 \frac{\bar{f}_S^2 \bar{A}^2 \bar{e}}{\bar{W}^2 (1 + \frac{\bar{e}\bar{A}}{\bar{W}})^4} \text{Cov}(A, W)
 \end{aligned} \quad (4-24)$$

där endast arean och böjmotståndet antagits vara korrelerade.

Det krävs dock omfattande studier innan man kan tilldela alla parametrar värden och man får oftast nöja sig med att söka erhålla ett fåtal. Tex är lastexcentriciteten ofta en lastberoende faktor vars inverkan på bärförmågan måste värderas separat. Detta kan göras i exempelvis diagramform där bärförmågans beroende av lastexcentriciteten, i detta fall representerat av faktorn $1/(1 + e A/W)$, illustreras i FIG 4-2 där beroendet av excentriciteten angivet i cm uppritats för några olika värden på kvoten A/W uttryckta i cm^2 resp cm^3 .

För ett liknande exempel men där slankhetstalet är av sådan storleksordning att risk för knäckning föreligger erhålles uttrycket för bärförmågan till

$$R = \frac{f_S A}{1 + \frac{e A}{W (1 - \frac{N}{N_k})}} \quad (4-25)$$

där N_k uttrycker strävans maximala bärförmåga vid centrisk last. Inverkan av variationer i N_k kan illustreras efter samma princip som ovan vilket resulterar i kurvor illustrerade i FIG 4-3.



FIG 4-2 Inverkan av lastexcentricitet på ett ståltvärnsnitts bärförmåga.

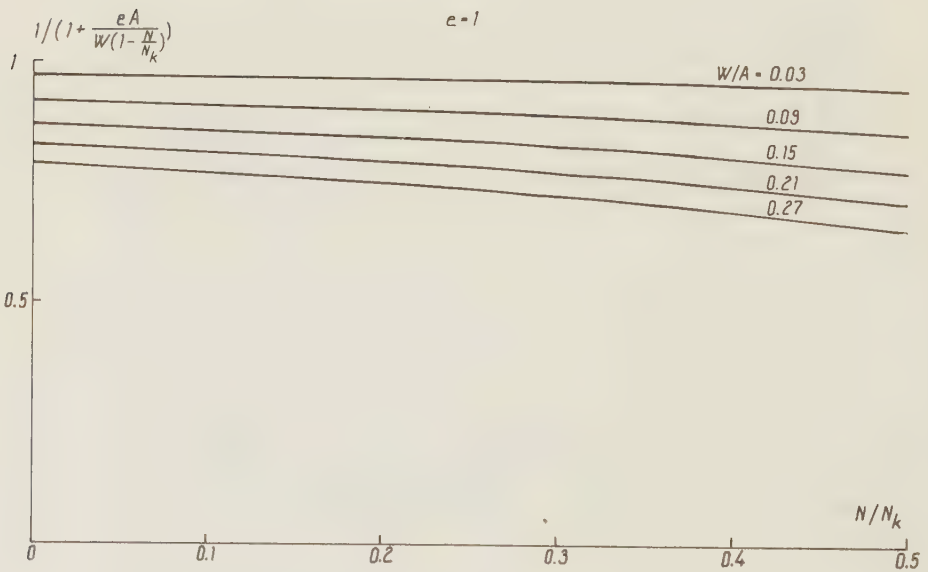


FIG 4-3a

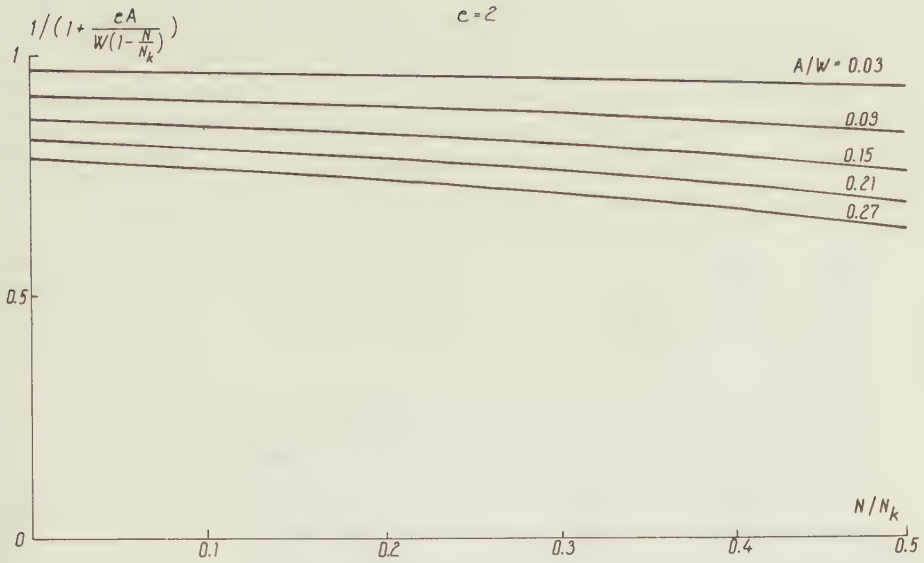


FIG 4-3b

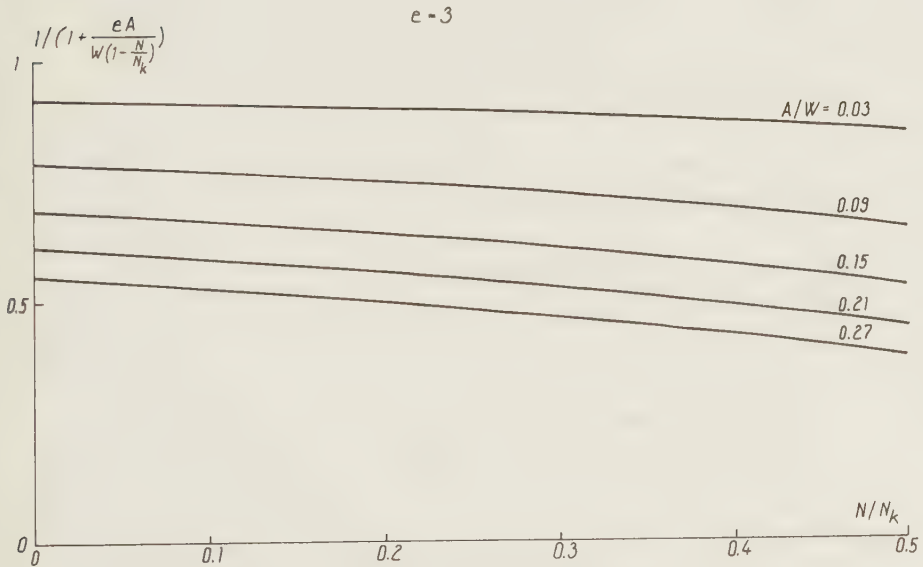


FIG 4-3c Inverkan av variationer i knäckningslast på ett stål-tvårsnitts bärförmåga.

Ett annat exempel, där olika beräkningsuttryck gäller för olika intervall, är fallet tryckt och momentbelastat betongtvärsnitt. Här antages för enkelhets skull att tvärsnittet är oarmerat, att sprickor tillåtes uppstå samt att draghållfastheten sättes lika med noll. Utseendet hos interaktionsdiagrammet blir i princip detsamma som det som gäller för armerat tvärsnitt.

För en tvådimensionell lasteffekt erhålles interaktionsdiagram med utseende i huvudsak enligt FIG 4-4 och FIG 4-5.

Diagrammet i FIG (4 - 4) har ett stort säkert område eller stor vidd, dvs. konstruktionsdelen förmår uppta många kombinationer av lasteffekterna S_1 och S_2 , jämfört med diagrammet i FIG (4 - 5). Är lasteffekterna okända och alla värden lika sannolika är det således säkrast att välja en konstruktionsdel med interaktionsdiagram enligt FIG (4 - 4). Är däremot lasteffekten S som här betecknar en kombination av lasteffekterna S_1 och S_2 , känd och har ett värde som motsvaras av det i FIG (4 - 4) och (4 - 5) inritade är det i stället säkrare att välja en konstruktionsdel med ett interaktionsdiagram enligt FIG (4 - 5). I detta fall spelar det ingen roll om lasteffekten S är given med sitt medelvärde eller som en fraktil. Marginalen till gränstillståndet blir i vilket fall som helst större för fallet enligt FIG (4 - 5).

För det oarmerade tryckta betongtvärsnittet kan ett interaktionsdiagram uppställas enligt nedan.

Först införes följande beteckningar

b = tvärsnittsbredd

h = tvärsnittshöjd

f_{cc} är betongens tryckhållfasthet

N_u är normalkraft i brottstadium

M_u är moment i brottstadium.

För det fall att hela tvärsnittet är tryckt erhålles två ytterlighetsfall enligt FIG (4 - 6).

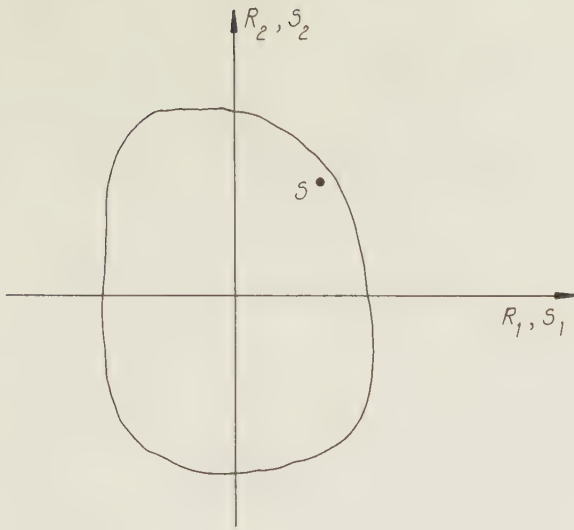


FIG 4-4 Interaktionsdiagram med stor vidd.

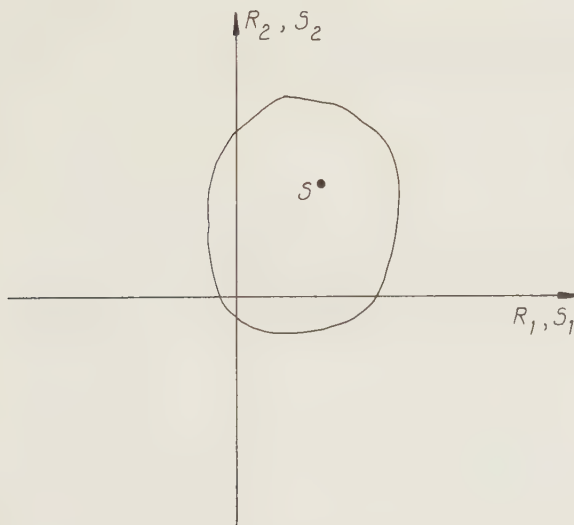


FIG 4-5 Interaktionsdiagram med liten vidd.

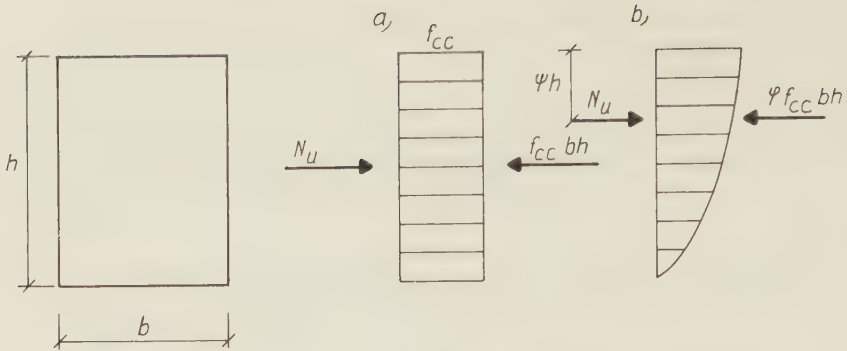


FIG 4-6 Påkänningsbild för helt tryckt tvärsnitt.

För fall enligt FIG 4-6 a) gäller att

$$M_u = 0 \quad (4 - 26)$$

$$N_u = f_{cc} b h \quad (4 - 27)$$

För fall enligt b) gäller att

$$M_u = \psi f_{cc} b h^2 (0.5 - \psi) \quad (4 - 28)$$

$$N_u = \psi f_{cc} b h \quad (4 - 29)$$

Antagesett rätlinjigt beroende gälla mellan normalkraft och moment i det intervall som begränsas av de två ytterlighetsfallen i FIG 4-6 kan de två ekvationerna (4 - 26) och (4 - 27) kombineras till

$$N_u = f_{cc} b h - \frac{2(1-\psi)}{\psi(1-2\psi)h} M_u \quad (4 - 30)$$

För det fall att tvärsnittet är delvis tryckt och betongens draghållfasthet satts till noll erhålles en påkänningsbild enligt FIG 4-7.

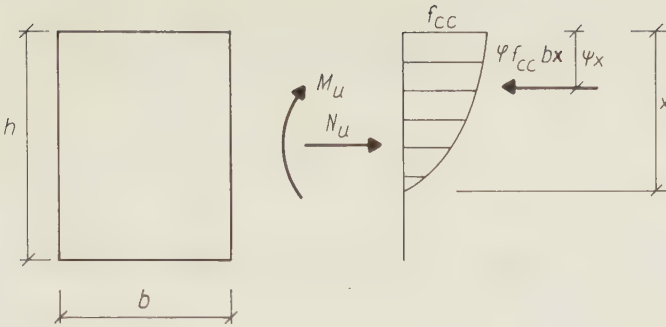


FIG 4 - 7 Påkänningsbild för delvis tryckt betongtvärsnitt.

För fall enligt FIG 4 - 7 gäller att

$$M_u = \varphi f_{CC} b h x \left(0.5 - \psi \frac{x}{h} \right) \quad (4 - 31)$$

$$N_u = \varphi f_{CC} b x \quad (4 - 32)$$

Kombineras ekvationerna (4 - 31) och (4 - 32) erhålles ett samband mellan moment och normalkraft för fallet i fråga. Sambandet blir

$$M_u = -N_u \left(N_u \frac{\psi}{\varphi f_{CC} b} - \frac{h}{2} \right) \quad (4 - 33)$$

För det fall att påkänningsfördelningen i tvärsnittet är linjär blir

$$\psi = \frac{1}{3} \quad \varphi = \frac{1}{2}$$

För fallet konstant påkänning i tvärsnittet antar ψ och φ värdena

$$\psi = \frac{1}{2} \quad \varphi = 1$$

Den verkliga påkänningsbilden ger ψ - och φ - värden i ett intervall som avgränsas av de ovan angivna värdena. I denna framställning väljs värdena

$$\psi = \frac{3}{8} \qquad \varphi = \frac{2}{3}$$

för sådana värden på moment och normalkraft att ekv (4 - 30) gäller och värdet på kvoten ψ / φ till

$$\frac{\psi}{\varphi} = \frac{9}{16}$$

för sådana värden på moment och normalkraft att ekv. (4 - 33) gäller.

Interaktionsdiagrammet för moment och normalkraft kan nu upprättas i FIG 4-8.

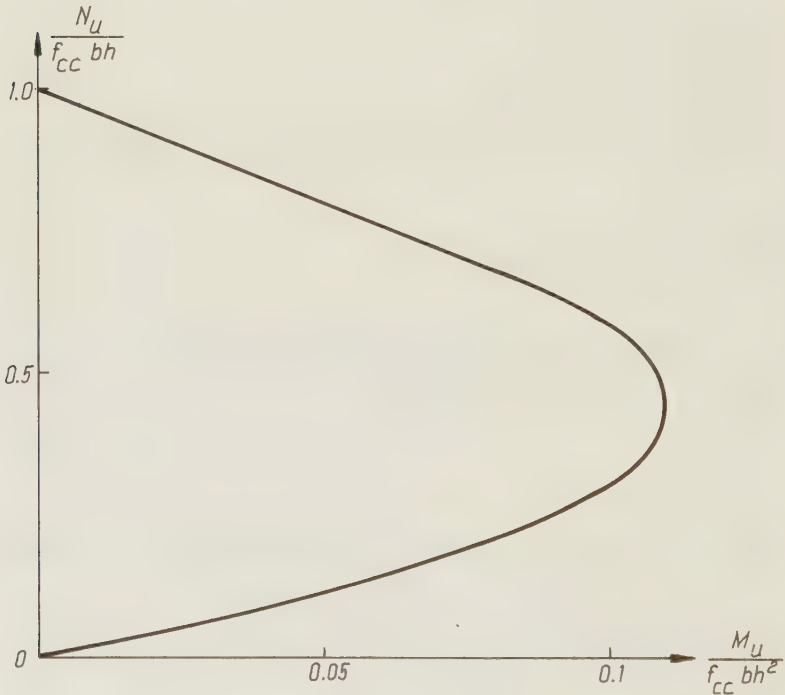


FIG 4-8 Interaktionsdiagram för tryckt och momentbelastat oarmerat betongtvärsnitt.

I diagrammet har variablerna gjorts dimensionslösa varigenom ekvationerna (4 - 30) och (4 - 33) skrives på formen

$$\frac{N_u}{f_{cc} bh} = 1 - \frac{2(1-\varphi)}{\varphi(1-2\varphi)} \frac{M_u}{f_{cc} bh^2} \quad (4 - 34)$$

som gäller i talintervallen 0, 1 till φ (0.5 - ψ), φ resp.

$$\frac{M_u}{f_{cc} bh^2} = - \frac{N_u}{f_{cc} bh} \left[\frac{N_u}{f_{cc} bh} \frac{\varphi}{\varphi} - 0.5 \right] \quad (4 - 35)$$

som gäller för övriga talpar.

Kurvan i FIG 4-8 beskriver ett gränstillstånd (limit state). I dimensioneringssammanhang är det önskvärt att dessutom känna gränskurvan för någon given sannolikhet. Det område som gränskurvan inramar (safe area) är då det område inom vilket en given lasteffekt får falla utan att den givna sannolikheten för skada överskrides. Det finns olika sätt att bestämma läget av gränskurvan. Ett sätt är att överföra bestämningen till ett endimensionellt problem genom att för givna värden på den ena variabeln undersöka den statistiska variationen hos den andra. Proceduren kan i det beskrivna exemplet illustreras med olika strålar längs vilka de statistiska parametrarna undersöks. Strålarna kan väljas i princip hur som helst så länge deras startpunkter ligger inom gränskurvan för gränstillståndet. Startpunkterna behöver inte ligga på koordinataxlarna och strålarna kan även vara svängda kurvor. I praktiken är det dock mest lämpligt med rätta linjer utgående från startpunkter på koordinataxlarna.

Appliceras det ovan beskrivna förfarandet på det tidigare givna exemplet framstår i princip tre möjligheter som framkomliga vägar att finna det "säkra området". För ett givet värde på $N = n$ uttryckes M explicit genom uttrycket (4 - 35) som

$$\frac{M_u}{f_{cc} b h^2} = \frac{-n}{f_{cc} b h} \left[\frac{n}{f_{cc} b h} \frac{\psi}{\phi} - 0.5 \right] \quad (4 - 37)$$

dvs de statistiska parametrarna för M_u kan bestämmas längs den horisontella linje som ekv $N = n$ beskriver.

Den slumpmässiga karaktären hos de ekvationer som bestämmer interaktionsdiagrammets utseende medför att, efter ett stort antal realiseringar, ett moln av interaktionsdiagram erhålles. Avståndet från en stråles startpunkt till skärningen med interaktionskurvan är en stokastisk variabel som har sin statistiska fördelning längs strålen. Om fördelningen med dess styrande parametrar är känd kan valda fraktiler av det nämnda avståndet beräknas. Ett sådant fraktilvärde utgör en punkt på den gränskurva som avgränsar ett "säkert område" svarande mot vald fraktil i fråga.

Om den horisontella linjen, svarande mot ekv (4 - 37), har sin startpunkt på vertikala axeln blir det ovan nämnda avståndet likvärdigt med det normerade brottmomentet som stokastisk variabel. Frekvensfunktionen för denna variabel kan erhållas ur frekvensfunktionerna för de ingående variablerna om dessa är kända. Här bör framhållas att detta teoretiskt inte är någon lätt uppgift. Tillvägagångssättet är dock detsamma som beskrivits tidigare i avsnitt 2.2. I FIG (4 - 9) visas de tre vanligaste metoderna att bestämma det "säkra området". Det streckade området hos de olika frekvensfunktionerna svarar mot samma valda fraktil, dvs den fraktil som det säkra området (området innanför den streckade linjen) ska svara mot.

Observera att om det säkra området ska bestämmas experimentellt och en vertikal stråle väljes kan i detta fall startpunkten inte ligga på horisontella axeln eftersom den då ligger utanför interaktionsdiagrammet. Startpunkten förlägges istället så långt upp att den med största säkerhet hamnar i det säkra området. Anta att det säkra området i exemplet ska bestämmas genom upprepad provning och att området för stora normalkrafter ska undersökas längs vertikala snitt. Pålastning av provkroppen måste då ske

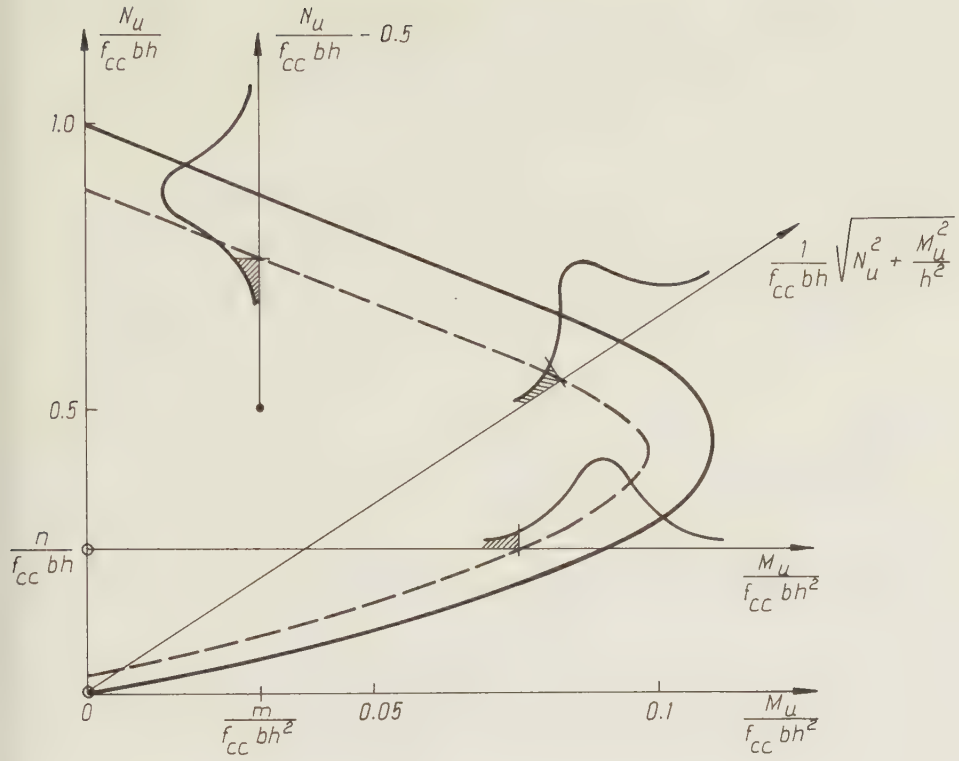


FIG 4-9 Olika metoder att bestämma område med vald säkerhet (safe area).

enligt följande ordning. Pålastning av normalkraft till en nivå motsvarande startpunktens nivå, därefter pålastning av moment till dess att startpunkten nås och därefter belastning till brott varvid avläsning av normalkraft vid brott göres.

I praktiken kan bestämning av det säkra området göras endast i diskreta punkter. I området för stora normalkrafter gäller att

$$P(N_u \leq N_0 \mid M_u = M_0) = P(f_{cc} bh - \frac{2(1-\varphi)M_0}{\varphi(1-2\psi)h} \leq N_0) \quad (4-38)$$

Införes beteckningen $\frac{2(1-\varphi)}{\varphi(1-2\psi)} = \kappa$ skrivs uttrycket som

$$P(f_{cc} bh \leq N_0 + \kappa \frac{M_0}{h}) = F_{f_{cc} bh}(N_0 + \kappa \frac{M_0}{h}) \quad (4-39)$$

där $F_{f_{cc} bh}$ betecknar fördelningsfunktionen för $f_{cc} bh$.

För att slutföra beskrivningen av exemplet antages här att f_{cc} är normalfördelad och att b och h kan antas vara deterministiska. Med detta är inte sagt att antagandet skulle vara en spegling av verkliga förhållanden.

Med ovan angivna förutsättningar skrivs $F_{f_{cc} bh}$ som

$$\begin{aligned} F_{f_{cc} bh}(N_0 + \kappa \frac{M_0}{h}) &= P(f_{cc} bh \leq N_0 + \kappa \frac{M_0}{h}) = \\ &= P(f_{cc} \leq \frac{N_0 + \kappa \frac{M_0}{h}}{bh}) = F_{f_{cc}}(\frac{N_0 + \kappa \frac{M_0}{h}}{bh}) \end{aligned} \quad (4-40)$$

Men f_{cc} antogs normalfördelad med medelvärde $\bar{f}_{cc}$ och standard avvikelse $\sigma_{f_{cc}}$. Detta ger

$$p = F_{f_{cc}} \left(\frac{N_0 + K \frac{M_0}{h}}{bh} \right) = \frac{1}{\sigma_{f_{cc}} \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{N_0 + K \frac{M_0}{h}}{bh}} e^{-\frac{(t - \bar{f}_{cc})^2}{2\sigma_{f_{cc}}^2}} dt \quad (4-41)$$

Alternativt efter övergång till standardiserad normalfördelning erhålles

$$p = \Phi \left[\frac{\frac{N_0 + K \frac{M_0}{h}}{bh} - \bar{f}_{cc}}{\sigma_{f_{cc}}} \right] \quad (4-42)$$

Hyfsas uttrycket erhålles

$$p = \Phi \left[\frac{1}{\sigma_{f_{cc}}} \left[\frac{N_0}{\bar{f}_{cc} bh} + \frac{K M_0}{\bar{f}_{cc} bh^2} - 1 \right] \right] \quad (4-43)$$

Från det tidigare beskrivna exemplet hämtas värdet på κ .

$$\kappa = \frac{2(1 - \frac{2}{3})}{\frac{2}{3}(1 - 2\frac{3}{8})} = 4 \quad (4-44)$$

För nedanstående värden på $\delta_{f_{cc}}$, p och $\frac{M_0}{\bar{f}_{cc} b h^2}$ kan punkter på

gränsen till det säkra området beräknas.

$$\delta_{f_{cc}} = 0.1$$

$$p = 10^{-2}$$

$$\frac{M_0}{\bar{f}_{cc} b h} = 0, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08$$

Fraktilen $p = 10^{-2}$ ger argumentet för den standardiserade normalfördelningen till $\phi^{-1}(p) \approx 2.31$. Nedanstående uppställning med värden beräknade ur ekv (4-43) erhålles

$\frac{M_0}{\bar{f}_{cc} b h^2}$	$\frac{N_0}{\bar{f}_{cc} b h}$
0	0.76
0.01	0.72
0.02	0.68
0.03	0.64
0.04	0.60
0.05	0.56
0.06	0.52
0.07	0.48
0.08	0.44

Inritas det erhållna gränsområdet i interaktionsdiagrammet erhålles, inte helt oväntat, en rät linje parallell med övre delen av interaktionsdiagrammet. Förfares på samma sätt för fallet med små och medelstora normalkrafter erhålles gränsområdet för motsvarande del av interaktionsdiagrammet. I detta fall är det

lämpligt att använda en form av ekvation som uttrycker moment vid given normalkraft dvs ekv. (4 - 33). Beräkningsgången blir i princip lika den föregående varför den här inte redovisas i detalj. Efter uppställning av sannolikhetssamband, omformning och övergång till standardiserad normalfördelning erhålles

$$\rho = \phi \left[\frac{1}{\delta_{f_{cc}}} \left[\frac{\psi}{\varphi} \frac{\frac{N_o^2}{(\bar{f}_{cc} b h)^2}}{\frac{1}{2} \frac{N_o}{\bar{f}_{cc} b h} - \frac{M_o}{\bar{f}_{cc} b h^2}} - 1 \right] \right] \quad (4 - 45)$$

En ny uppställning efter samma principer som tidigare ger

($\frac{\psi}{\varphi}$ sättes till $\frac{9}{16}$).

$\frac{N_o}{\bar{f}_{cc} b h}$	$\frac{M_o}{\bar{f}_{cc} b h^2}$
0	0
0.05	0.023
0.10	0.043
0.15	0.058
0.20	0.071
0.25	0.079
0.30	0.084
0.35	0.085
0.40	0.082
0.45	0.076
0.50	0.066
0.55	0.052
0.60	0.034
0.65	0.013

I FIG 4-10 visas interaktionsdiagrammet för medelvärde och för den gränskurva som svarar mot sannolikheten 10^{-2} .

I detta sammanhang är det även lämpligt att beskriva dimensionering enligt metoder beskrivna i KAP 3. Antag att ett oarmerat betongtvärsnitt ska dimensioneras för en normalkraft som angriper på en symmetrilinje på avståndet $e = 0.1 h$ från tvärsnittets tyngdpunkt. En dimensionering med metod på nivå III kräver kännedom om lastens fördelning. Anta här att normalkraften är normalfördelad med medelvärde $\bar{N} = 0.5 \bar{f}_{cc} b h$ och variationskoefficient $\delta_N = 0.2$ samt att last och bärförmåga är oberoende av varandra. Uppgiften är att bestämma sannolikheten för brott vid given bredd b , höjd h och given betongkvalitet (givet $\bar{f}_{cc}$).

Betonghållfasthetens variationskoefficient $\delta_{f_{cc}}$ sätts till 0.1. Brottrisken p_f kan nu skrivas

$$p_f = P(R \leq 0) = P(N_u \leq N) = P(N_u - N \leq 0) =$$

$$P\left(\frac{f_{cc} b h}{1 + \mu 0.1} - N \leq 0\right) = P\left(f_{cc} - \frac{1.4 N}{b h} \leq 0\right) \quad (4-46)$$

då värdet på $\mu = 4$.

Betonghållfastheten antages vara normalfördelad dvs

$$f_{cc} \in N(\bar{f}_{cc}, \sigma_{f_{cc}})$$

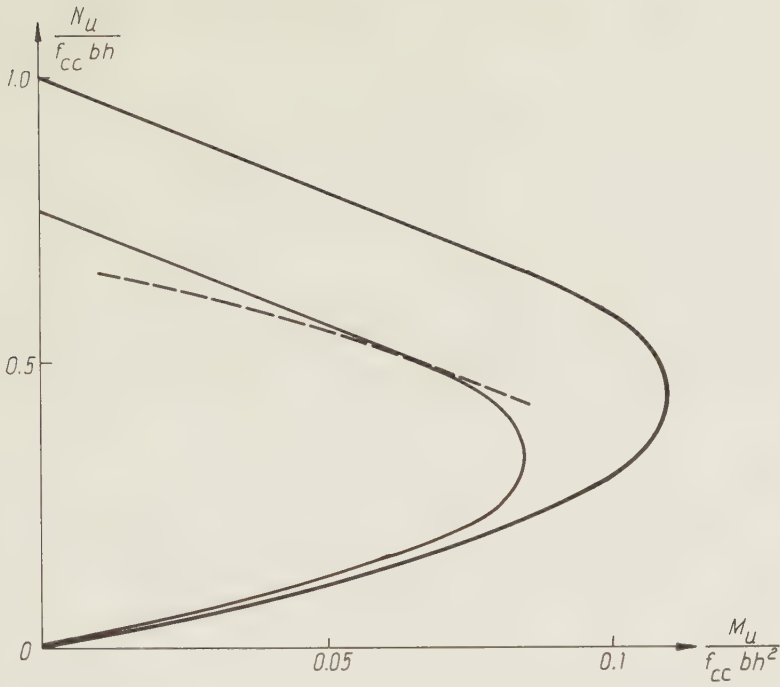


FIG 4 - 10 Interaktionsdiagram för tryckt och momentbelastat oarmerat betongtvärsnitt - medelkurva samt den gränskurva som svarar mot sannolikheten 10^{-2} .

Även normalkraften antogs normalfördelad dvs.

$$N \in N(\bar{N}, \sigma_N)$$

Då gäller att

$$\frac{1.4 N}{bh} \in N\left(\frac{1.4 \bar{N}}{bh}, \frac{1.4 \sigma_N}{bh}\right)$$

och

$$f_{CC} - \frac{1.4 N}{bh} \in N\left(\bar{f}_{CC} - \frac{1.4 \bar{N}}{bh}, \sqrt{\sigma_{f_{CC}}^2 + \left[\frac{1.4 \sigma_N}{bh}\right]^2}\right)$$

Med insatt $\bar{N} = 0.5 \bar{f}_{CC} b h$ erhålles p_f enligt ekv. (4 - 46) till

$$p_f = \phi \left[-\frac{\bar{f}_{CC} - 0.7 \bar{f}_{CC}}{\bar{f}_{CC} \sqrt{0.1^2 + 0.14^2}} \right] \quad (4 - 47)$$

Uträknat blir uttrycket

$$p_f = \phi [-1.744] = 0.041 \quad (4 - 48)$$

För det fall att normalkraften hade ett deterministiskt värde $N = \bar{N}$ blir motsvarande sannolikhet för brott

$$p_f = \phi [-3] = 0.00135 \quad (4-49)$$

Omvänt och kanske mer verklighetsanknutet kan erforderlig betonghållfasthet bestämmas ur villkoret om en viss föreskriven brottrisk. För detta ändamål behövs ytterligare information. Föreskriven brottrisk antages vara 10^{-6} .

Angripande normalkraft, med excentriciteten $0.1 h$, har medelvärde 1 MN och variationskoefficient $\delta_N = 0.2$. Betongtvärsnittets dimensioner är $b = 0.3 \text{ m}$ $h = 0.5 \text{ m}$. I övrigt gäller samma förutsättningar som tidigare. Då erhålles

$$10^{-6} = \phi \left[- \frac{\bar{f}_{cc} - \frac{1.4}{0.15}}{\sqrt{(0.1 \bar{f}_{cc})^2 + (\frac{1.4 - 0.2}{0.15})^2}} \right] \quad (4-50)$$

Efter insättning av $\phi^{-1} (10^{-6}) = -4.75$ och omformning erhålles.

$$\bar{f}_{cc} = 23.64 \text{ MN/m}^2 \quad (4-51)$$

Här väljs en betongkvalitet vars medelhållfasthetsvärde i färdig konstruktion är minst 23.64 MN/m^2 .

För det fall att betongkvaliteten är given på förhand kan naturligtvis en dimensionsvariabel, exempelvis h , erhållas ur ekv. (4-50). Dimensionerande tvärsnittshöjd skulle i detta fall erhållas ur uttrycket

$$-4.75 = - \frac{30 - \frac{1.4}{0.3 h}}{\sqrt{(0.1 \cdot 30)^2 + \left(\frac{1.4 \cdot 0.2}{0.3 h}\right)^2}} \quad (4-52)$$

där betonghållfasthetens medelvärde satts till 30 MN/m^2 . Tvärsnittshöjden uträknas till

$$h = 0.394 \text{ m} \quad (4-53)$$

Dimensioneringsmetodiken illustreras i FIG 4-11.

En dimensionering enligt metod på nivå II skulle se ut enligt följande. Vi antar här att, som i det sist beskrivna exemplet, betonghållfasthetens medelvärde i färdig konstruktion är 30 MN/m^2 och att uppgiften består i att bestämma tvärsnittshöjden h .

Funktionen g har utseendet

$$g = f_{cc} b h \cdot 0.714 - N \quad (4-54)$$

Säkerhetskravet formuleras som

$$P(g \leq 0) = p_f \quad (4-55)$$

och dimensioneringskriteriet ges av

$$g^* = f_{cc}^* b^* h^* \cdot 0.714 - N^* = 0 \quad (4-56)$$

Lineariseringspunkten är $(f_{cc}^*, b^*, h^*, N^*)$ och g kan skrivas som

$$g = f_{cc}^* b^* h^* \cdot 0.714 - N^* + \frac{\partial g}{\partial f_{cc}} (f_{cc} - f_{cc}^*) + \frac{\partial g}{\partial N} (N - N^*) \quad (4-57)$$

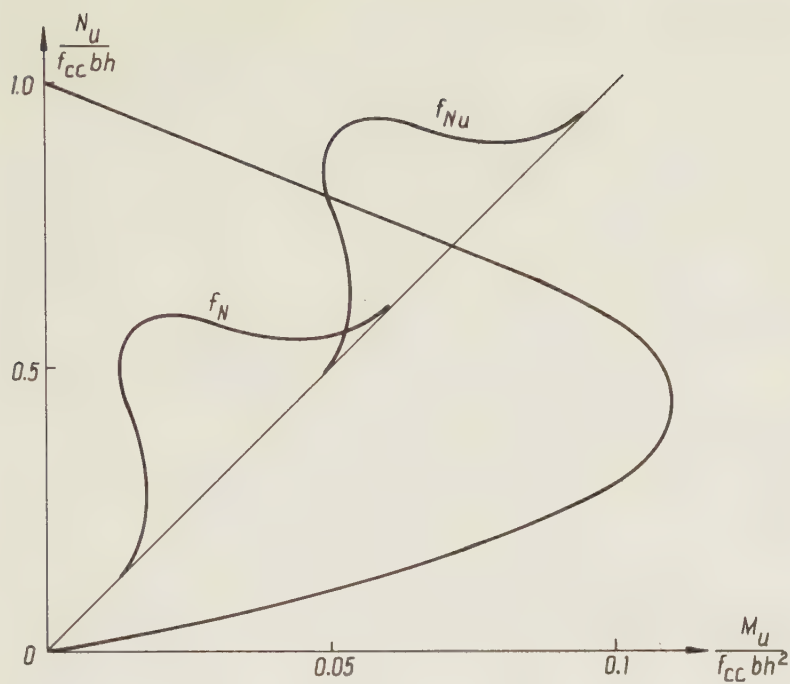


FIG 4-11 Illustration av dimensioneringsmetod på nivå III.

eftersom b och h är deterministiska.

Dimensioneringsvärdena tecknas som

$$\left. \begin{aligned} f_{cc}^* &= \bar{f}_{cc} (1 - \alpha_{f_{cc}} \cdot \beta \cdot \delta_{f_{cc}}) \\ b^* &= b = 0.3 \\ h^* &= h \\ N^* &= \bar{N} (1 - \alpha_N \beta \delta_N) \end{aligned} \right\} \quad (4-58)$$

där

$$\alpha_{f_{cc}} = \frac{0.714 bh \cdot \beta \sigma_{f_{cc}}}{\sqrt{(0.714 bh \beta \sigma_{f_{cc}})^2 + (\beta \sigma_N)^2}} \quad (4-59)$$

$$\alpha_N = \frac{-1 \cdot \beta \sigma_N}{\sqrt{(0.714 bh \beta \sigma_{f_{cc}})^2 + (\beta \sigma_N)^2}} \quad (4-60)$$

Med $\beta = 4.75$ blir

$$\alpha_{f_{cc}} = \frac{3.052 h}{\sqrt{9.317 h^2 + 0.903}} \quad (4-61)$$

och

$$\alpha_N = \frac{-0.95}{\sqrt{9.317 h^2 + 0.903}} \quad (4-62)$$

Med insatta värden i ekv. (4-56) erhålles

$$30 \left(1 - \frac{3.052 h}{\sqrt{9.317 h^2 + 0.903}} \cdot 4.75 \cdot 0.1 \right) \cdot 0.3 \cdot h \cdot 0.714 -$$

$$- 1 \left(1 + \frac{0.95}{\sqrt{9.317 h^2 + 0.903}} \cdot 4.75 \cdot 0.2 \right) = 0 \quad (4-63)$$

vilket ger

$$h = \frac{1}{6.426} \frac{1 + \frac{0.903}{\sqrt{9.317 h^2 + 0.903}}}{1 - \frac{1.450 h}{\sqrt{9.317 h^2 + 0.903}}} \quad (4-64)$$

Passningsräkning ger

$$h = 0.394 \text{ m} \quad (4-65)$$

vilket är och bör vara samma resultat som för det föregående fallet.

Illustration av metodiken göres i FIG 4-12.

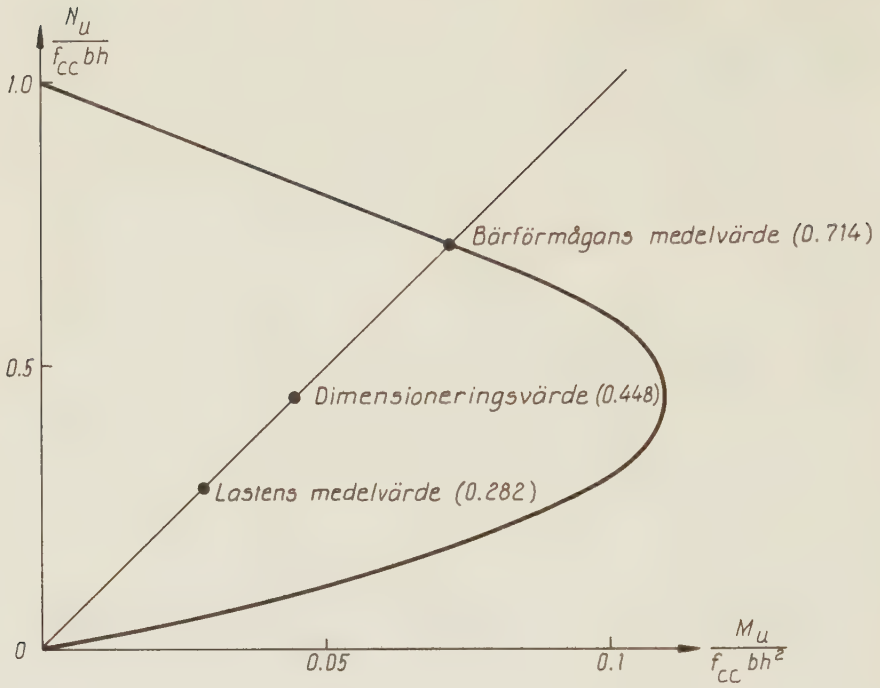


FIG 4-12 Illustration av dimensioneringsmetod på nivå II.

Bestämning av erforderlig tvärsnittshöjd enligt metod på nivå I göres i princip enligt nedan.

Karakteristiska last- och hållfasthetsvärden anges med fraktilvärdena 0.02 resp. 0.05. Med givna förutsättningar beaktade erhålles i detta fall

$$\left. \begin{aligned} (f_{cc})_k &= 30(1 - 1.65 \cdot 0.1) = 25.05 \text{ MN/m}^2 \\ N_k &= 1(1 + 2.05 \cdot 0.2) = 1.41 \text{ MN} \end{aligned} \right\} \quad (4 - 66)$$

Dimensioneringskriteriet ges av

$$\frac{1}{\gamma_m} (f_{cc})_k \cdot bh \cdot 0.714 - \gamma_F \cdot N_k = 0 \quad (4 - 67)$$

där γ_m och γ_F betecknar partialkoefficienter för material resp. last.

Partialkoefficienterna väljs här till

$$\left. \begin{aligned} \gamma_m &= 1.2 \\ \gamma_F &= 1.3 \end{aligned} \right\} \quad (4 - 68)$$

Ekv. (4 - 67) ges därefter tvärsnittshöjden

$$h = 0.410 \text{ m} \quad (4 - 69)$$

4.4 Invariansproblem

De första statistiska modellerna som presenterades hade, som man fann långt senare, en icke önskvärd egenskap. De var i något avseende icke invarianta med avseende på de ingående parametrarnas karaktär. Om R , S och N är inbördes oberoende variabler, så är i statistisk mening

$$R - (S + N) \neq (R - S) - N \quad (4 - 70)$$

om säkerhetssystemet inte är additionsinvariant. Exempel på ett dylikt system är Estevas system.

Om på motsvarande sätt säkerhetssystemet inte är multiplikationsinvariant så gäller att

$$R - S - N \neq R \left(1 - \frac{S}{R} - \frac{N}{R} \right) \quad (4 - 71)$$

Ett enkelt exempel beskriver problematiken med additionsinvarians. Anta att ett armerat betongtvärsnitt, där armeringens dragkraft är P , belastas med en normalkraft N som angriper i dragarmeringens läge. Om det yttre momentet är M och inre hävarmen är ρ kan dimensioneringsproblemet skrivas på i princip två sätt

$$1) \quad P \cdot \rho - (M + N \cdot \rho) = 0$$

$$2) \quad (P - N) \cdot \rho - M = 0$$

Skrives säkerhetsmättet som (Estevas β)

$$\beta = \frac{\ln \frac{\bar{R}}{\bar{S}}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (4 - 72)$$

Förutsättes att de ingående variablerna är oberoende erhålles för de bägge fallen

$$\beta_1 = \frac{\ln \frac{\bar{P} \cdot \bar{\rho}}{\bar{M} + \bar{N} \cdot \bar{\rho}}}{\sqrt{\sigma_{P \cdot \rho}^2 + \sigma_{M+N \cdot \rho}^2}} \quad (4 - 73)$$

och

$$\beta_2 = \frac{\ln \frac{(\bar{P} - \bar{N}) \bar{\rho}}{\bar{M}}}{\sqrt{\sigma_{(P-N)\rho}^2 + \sigma_M^2}} \quad (4 - 74)$$

Uppenbarligen är, om ej av ren slump, $\beta_1 \neq \beta_2$

Ett annat enkelt exempel beskriver problemet med multiplikationsinvariants. Ett armerat betongtvärsnitt utsätts för ett böjmoment M . Bärförmågan kan skrivas som $P \cdot \rho$ där P och ρ precis som tidigare står för armeringens dragkraft resp. inre hävarmen.

Dimensioneringsproblemet kan skrivas på i princip två sätt

$$1) \quad P \cdot \rho - M = 0 \quad (4 - 75)$$

$$2) \quad P - \frac{M}{\rho} = 0 \quad (4 - 76)$$

Används som säkerhetsmått

$$\beta = \frac{\bar{R} - \bar{S}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (\text{Cornells } \beta) \quad (4 - 77)$$

erhålles

$$\beta_1 = \frac{P \cdot \rho - \bar{M}}{\sqrt{\sigma_{P \cdot \rho}^2 + \sigma_M^2}} \quad (4 - 78)$$

$$\beta_2 = \frac{\bar{P} - \frac{\bar{M}}{\bar{\rho}}}{\sqrt{\sigma_P^2 + \sigma_{M/\rho}^2}} \quad (4 - 79)$$

Såvida ρ ej är en deterministisk variabel så gäller att $\beta_1 \neq \beta_2$. När invariansproblematiken väl upptäcktes utarbetades alternativa säkerhetssystem som inte var behäftade med ovan nämnda defekt men väl med andra. Lind föreslog en metod att transformera dimensioneringsvariabeln till en geometrisk storhet. Detta system var invariant både vid addition och multiplikation men hade andra svagheter bl.a. vid val av den geometriska storhet som skulle dimensioneras. I det kopplade fallet med tvärsnitt belastat med böj-moment och normalkraft blir det olika resultat om man använder tvärsnittsarea eller böjmotstånd som dimensioneringsparameter. Ditlevsen utvecklade på grundval av Linds metod en variant där säkerheten uttrycktes genom en faktor multiplicerad med materialhållfasthet istället för en geometrisk storhet. Metoden var även multiplikations- och additionsinvariant men var inte helt entydig för sådana fall där flera materialparametrar ingår i den mekaniska formuleringen som t.ex. vid överarmerat betongtvärsnitt.

5. HÅLLFASTHETSDATA

5.1 Hållfasthetsvärdenas karaktär

Om man utför ett antal hållfasthetsprov så kommer mätresultaten att variera på ett icke kontrollerbart sätt. Orsakerna till variationerna kan vara många och av skiftande karaktär. Gemensamt för dessa är dock att de är svåra att ta hänsyn till i en direkt behandling. Inverkan av variabiliteten kan göras genom införande av stokastiska variabler då slumpmässigheten kan uttryckas i tal vilket är nödvändigt vid dimensionering. Används fraktilvärden i dimensioneringsprocessen är det även nödvändigt att känna till de stokastiska variablernas fördelningar. Dessa kan bestämmas genom att prova sig fram. Lämpligen används färdigtryckta papper för ändamålet om man tror att någon känd standardfördelning kan beskriva den uppträdande slumpmässigheten. Passar ingen standardfördelning kan man själv ställa upp en passande fördelningsfunktion så länge kraven på en fördelningsfunktion är uppfyllda. Kraven är dock ganska lätta att uppfylla.

Vanliga standardfördelningar som ofta används inom hållfasthetsområdet är normalfördelning, lognormalfördelning och extremvärdesfördelningar. Vilken fördelning man väljer är beroende av vad man önskar beskriva. Är avsikten att ange hur hållfasthetsvärdena fördelar sig i stort är det lämpligt att välja en fördelning som så väl som möjligt ansluter sig till huvudmassan av mätvärdena. Denna metod är också den mest vanliga.

Vill man istället beskriva en yttre gren av fördelningen, t.ex. den undre svansen i hållfasthetsfördelningen, är tillvägagångssättet ej längre lätt bestämt. En extrapolering på fördelningspapper kan ge missvisande resultat i det att huvudmassans fördelning styr svansarnas utseende. Ett annat sätt är att anpassa en fördelningsfunktion till de mätvärden som finns i det intervall man är intresserad av, vilket är ett bättre alternativ än det föregående. Är man bara intresserad av ett fraktilvärde ger den direkta informationen det bästa utbytet dvs. andelen mätvärden i

det aktuella intervallet är ett bättre mått på fraktilen än det som erhålles vid integrering av en standardfördelningsfunktion som anpassats till huvudmassan. Metoder att representera svansar hos fördelningar har redovisats av bl a Öfverbeck.

Anpassning av fördelningar till slumpmässiga mätresultat kan störas av mätvärden vars storlek har andra orsaker än de normalt förekommande. I FIG (5-1) är ritat ett exempel på histogram där en organiserad fördelningsanpassning stöter på svårigheter.

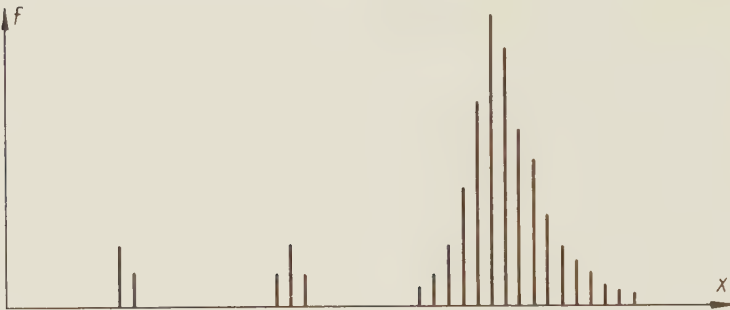


FIG 5-1. Histogram för materialbrott orsakat av olika faktorer.

I det fall som FIG (5-1) illustrerar är de olika grupperna troligen att hänföra till olika orsaker och varje orsak bör i detta fall ges en egen fördelning. De två grupperna till vänster i FIG (5-1) kanske kan elimineras genom kontroll. De kan vara orsakade av mät- eller utförandefel eller vara orsakade av brister i produktionen. Det väsentliga är dock att man inte drar den slutsatsen att en kvalitetshöjning av materialet som helhet avhjälpel felen.

Den mest önskvärda informationen i hållfasthetssammanhang är nästan aldrig tillgänglig, nämligen data för den variabel som förekommer i mekaniska beräkningsmodeller. Materialdata för standardprov i laboratoriemiljö finns normalt tillgängligt men dessa ska

överförs till hållfasthetsdata i färdig konstruktion med andra mått, andra material i samverkan och annan miljö. Till detta kommer även inverkan av tid vilken ibland påverkar materialhållfastheten negativt.

I princip är utnyttjande av provdata en prediktion av en variabel med hjälp av observationer av en annan. I praktiken är denna överföring svårbemästrad eftersom regressionsfunktionerna inte är helt kända. Däremot finns i litteraturen försöksresultat redovisade på så sätt att åtminstone en grov relation mellan olika variabler kan erhållas.

5.2 Betongkonstruktioner

Den armerade betongens andel av betongens historia är förhållandevis liten och utvecklingen har skett huvudsakligen efter det att portlandcementet tagits i bruk. Med undantag av de senaste årtiondena har den mest intressanta egenskapen hos betong varit dess hållfasthet. Vid tiden för portlandcementens införande kände man till inverkan av ballastgradering, proportionering och vattenmängd. Man eftersträvade en så torr betong som möjligt eftersom hållfastheten då blev större. Att betongen samtidigt, tack vare stora svårigheter med bearbetningen, erhöll ojämn kvalitet samt blev otät bidrog till att betongens användningsområden begränsades. Oarmerade klumpkonstruktioner fungerade tillfredsställande medan betongens användning i vattenbyggnadskonstruktioner medförde olägenheter. I och med att den armerade betongen uppfanns utvidgades betongens användningsområden samtidigt som behov av beräkningsmetoder för betongkonstruktioners bärförmåga uppstod. Trots att betong använts i byggnadskonstruktioner i ungefär 3000 år är den äldsta konstruktionsberäkningen för armerad betong yngre än 100 år. Tidigare var betongens hållfasthet ett mått på dess kvalitet. Idag är även egenskaper som frostbeständighet, täthet, töjbarhet, ytegenskaper etc. avgörande för kvalitetsbestämning. Som utgångspunkt vid dimensionering av betongkonstruktioner används nästan uteslutande betongens tryckhållfasthet som paradoxalt nog är svår att bestämma. Kvalitetsbestämning med avseende på tryckhållfasthet göres genom provning av

standardiserade provkroppar. Standardiseringen är dock inte internationell inte heller lagringsförhållandena under tiden från gjutning fram till provning. Det blir således vanskligt att koppla samman resultat från t.ex. torrlagrade betongkuber och våtlagrade betongcylindrar. Olika laboratoriers provningsutrustning och provningsmetoder spelar också in. Exempelvis erhålles en ca 50 procentig reduktion av tryckhållfastheten om friktionen mellan provkropp och tryckplattor upphävs. Brott i provkroppen sker då därför att betongen inte tål den tvärutvidgning som det enaxliga påkännings-tillståndet medför. Även faktorer som provkroppsstorlek, belastningstid, vibrering, lagring, ålder och temperatur påverkar provningsresultaten, men även om entydiga samband mellan de olika faktorerna och betongens tryckhållfasthet kunde ställas upp skulle detta inte ge någon revolutionerande ny insikt om det mest intressanta, nämligen betongens hållfasthet i färdig konstruktion.

Mot bakgrund av ovannämnda förhållanden är det kanske något för-mätet att påstå att det går att statistiskt bestämma betongens hållfasthet. Idag är man dock hänvisad till de resultat som finns om man är intresserad av stora provningsmängder. I det material som här är bearbetat kan således finnas provningsvärden som är att hänföra till grova fel t.ex. felmärkning av kvalitet och fel-aktigt förfaringssätt vid provning.

5.2.1 Hållfasthetsdata för betong

Kontrollnämnden för fabriksbetong har åt Cement- och Betonginstituet, kontrollavdelningen uppdragit att utarbeta bestämmelser för fabriksbetong samt att utföra besiktningar av fabriker. Kontrollavdelningen erhåller även provningsresultat från fabriker i form av hållfasthetsvärden från kubprovningar. Kuberna tas ut i serier om tre och seriemedelvärdena lagras av kontrollavdelningen på hållkort vilket är en nödvändighet för att med rimlig arbetsinsats insamla stora mängder data.

Uttagen kontrollmängd är beroende av mängden tillverkad betong-massa på så sätt att för hållfasthetsklassen under K400 ska en

provserie uttas för var 150:e sats dock minst en provserie per kalendermånad. För K400 och högre uttas en provserie per tillverkningsdag. De i serien ingående provkropparna ska tas ur olika lass.

Data från kontrollavdelningens kortregister rörande resultat från provning av kuber i tillverkningsklass I har hämtats från åren 1965 - 1974 dvs under en tioårsperiod. I antal provade kuber motsvarar detta drygt 800.000 kuber i tillverkningsklass I. Bearbetningen av data har gjorts i avsikt att få svar på frågor enligt nedan.

1. Hur stor är kubhållfasthetens medelvärde och standardavvikelse för en given hållfasthetsklass?
2. Hur ser fördelningen ut för en given hållfasthetsklass och speciellt då den undre svansen?

Då endast seriemedelvärden lagrats på data måste parametervärdena transformeras till värden som gäller för enskilda kuber. För att uppnå detta har data från fyra slumpmässigt utvalda fabriker undersökts. Två vanliga hållfasthetsklasser K250 och K400 har utvalts främst med tanke på att produktionen av de undersökta hållfasthetsklasserna ska vara obruten i tiden under cirka 1 år. Hållfasthetsdata för enskilda kubvärden har sorterats i tidsföljd så att de kan behandlas med teori för stokastiska processer i princip enligt FIG 5-2.

Det är nu möjligt att skatta kovariansfunktionen $R(\tau)$ med uttrycket

$$R(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-\tau} (X(t+\tau) - \bar{X})(X(t) - \bar{X}) \quad (5-1)$$

där $X(t)$ är kubhållfasthet vid tidpunkt t och τ betecknar tids- eller enhetsintervall.



FIG 5-2. Stokastisk modell av kubhållfasthet.

För hållfasthetsklasser under K400 är provuttagningen huvudsakligen mängdberoende. Vid obruten löpande produktion är detta dock att hänföra till en tidsindelning. Betecknas enskild kubvärde med X kan detta skrivas

$$X = X_m + X_f + X_s + X_k \quad (5-2)$$

där X_m är riksmedelvärdet för aktuell kvalitet

X_f , X_s och X_k är slumpmässiga variabler, alla med medelvärdet noll, som hänför sig till variationer med avseende på fabrik, serie, resp enskilt värde.

Om för ett ögonblick enskilda värden betecknas $X_{i,j}$ gäller för varje fabrik att

$$X_{ij} = \mu_i + U_{ij} \quad (5-3)$$

där μ_i är fabriksmedelvärdet och U_{ij} betecknar variationen kring medelvärdet μ_i .

Betecknas varje serie med X_{s3} erhålles

$$\bar{X}_{s3} = \frac{1}{3} (3\mu + U_{i,1} + U_{i,2} + U_{i,3}) = \mu + \bar{U} \quad (5-4)$$

Variansen för $\bar{X}_{s3}$ beräknas nu till

$$V(\bar{X}_{s3}) = V(\bar{U}) = \frac{1}{9} [3R_0 + 2(2R_1 + R_2)] \quad (5-5)$$

där

$$R_0 = V(U_i)$$

$$R_1 = C(U_i, U_{i+1})$$

$$R_2 = C(U_i, U_{i+2})$$

Ett biresultat av undersökningen är en värdering av kontrolluttaget av kubprover. Erhålles en korrelationskurva i princip enligt FIG 5-3 är intervallen mellan provtagningar för korta medan det motsatta förhållandet gäller om en kurva enligt FIG 5-4 erhålles. I FIG 5-3 och 5-4 betecknar τ enskilda kubvärden i tidsföljd.

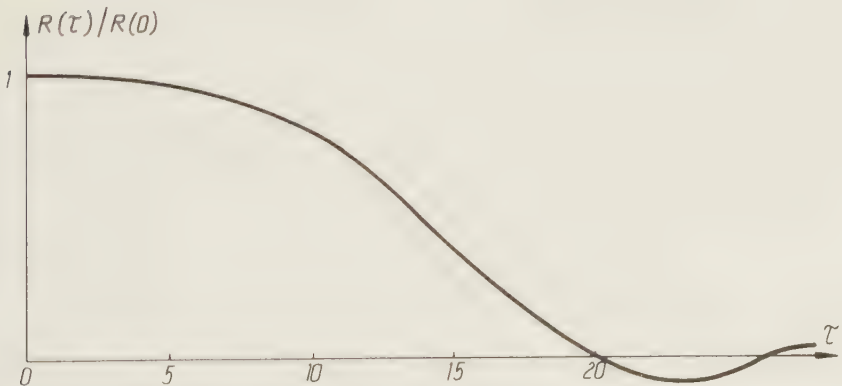


FIG 5-3. Korrelationskurva för starkt korrelerade värden.

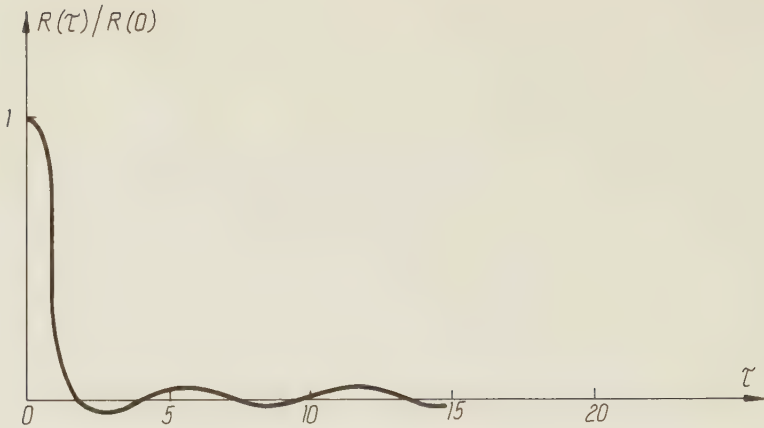


FIG 5-4. Korrelationskurva för nära oberoende värden.

Först utförs beräkning av kovariansfunktionen $R(\tau)$ (EKV 5-1) för fyra fabriker och två kvaliteter vilka redovisas i FIG 5-5 till 5-12. En sammanställning av kovarianser R_0 , R_1 och R_2 återfinns i TAB 5-1. Dessa ska senare användas vid beräkning av standardavvikelsen för hållfastheten hos enskild kub.

Utseendet hos kurvorna i FIG 5-5 till 5-12 visar att uttaget av kuber ur betongmassa är rimligt och inte för stort. Korrelationskoefficienten mellan två på varandra följande kubprov är för samtliga fall ungefär 0.5.

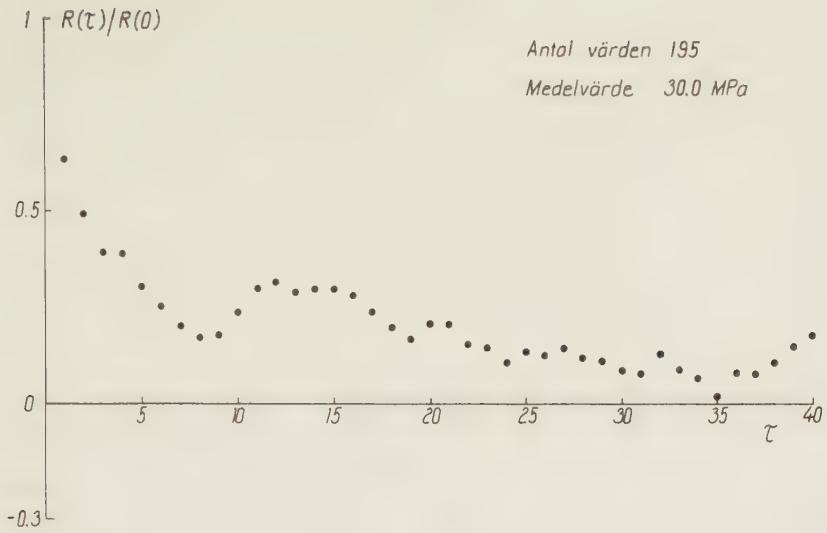


FIG 5-5. Korrelationskurva för K250. Fabrik 1.

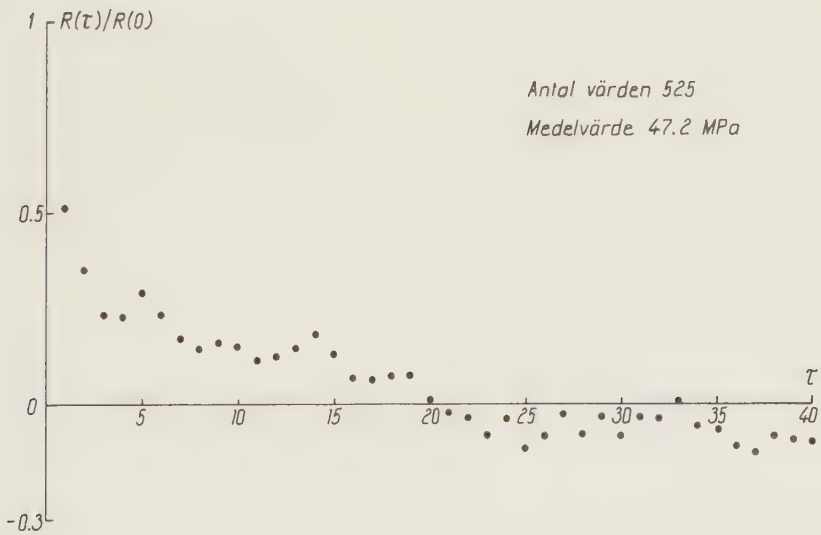


FIG 5-6. Korrelationskurva för K400. Fabrik 1.

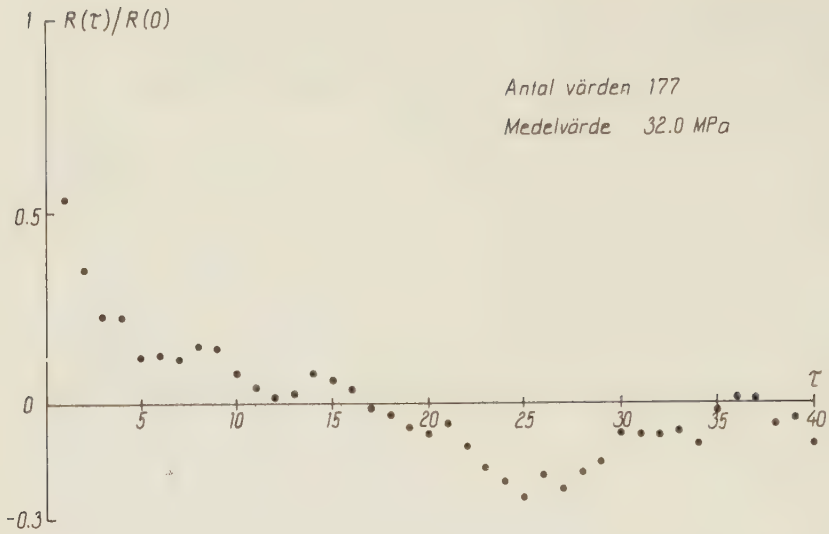


FIG 5-7. Korrelationskurva för K250. Fabrik 2.

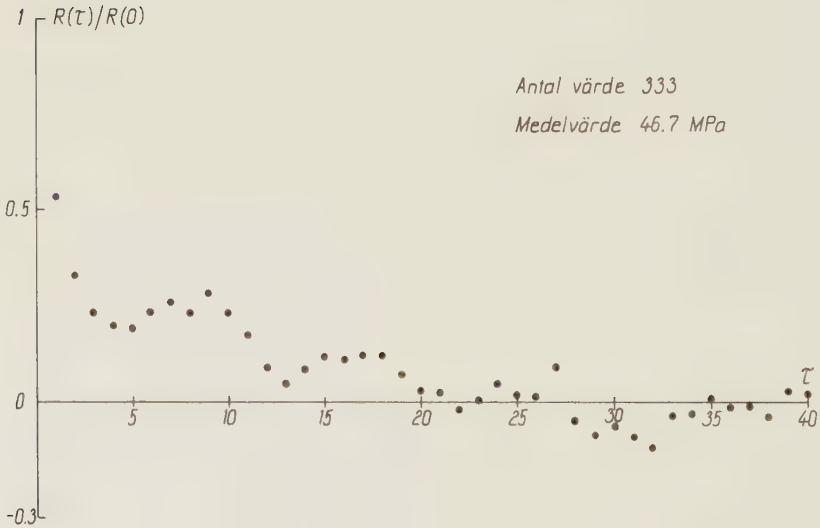


FIG 5-8. Korrelationskurva för K400. Fabrik 2.

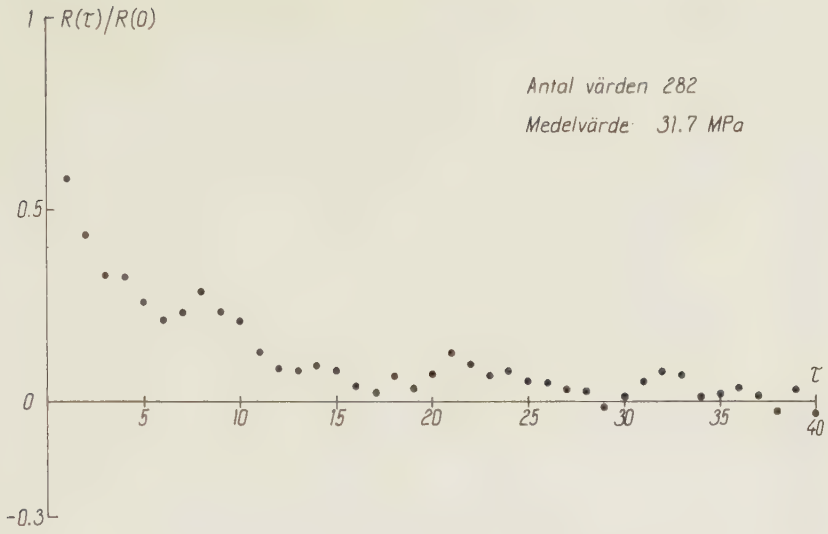


FIG 5-9. Korrelationskurva för K250. Fabrik 3.

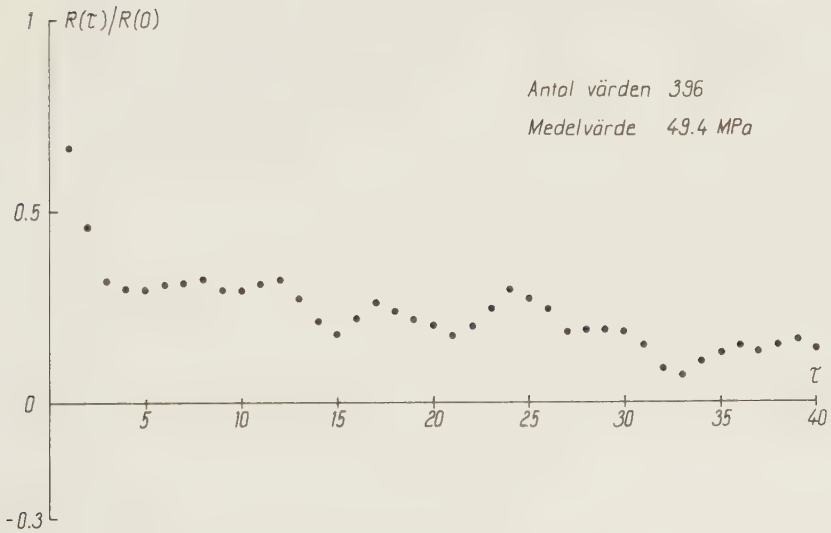


FIG 5-10. Korrelationskurva för K400. Fabrik 3.

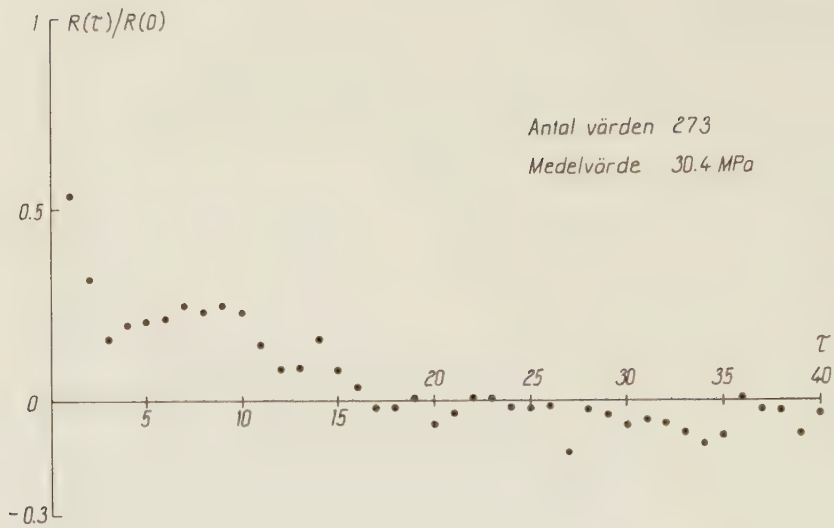


FIG 5-11. Korrelationskurva för K250. Fabrik 4.

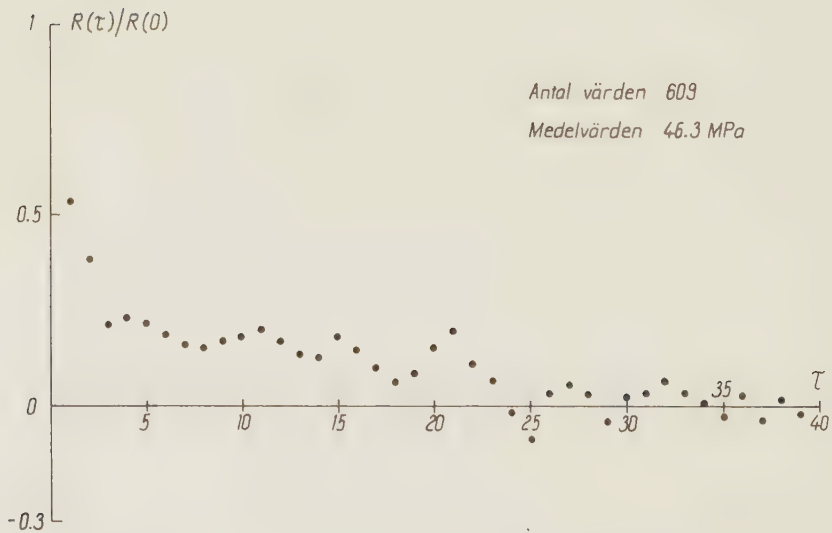


FIG 5-12. Korrelationskurva för K400. Fabrik 4.

TAB 5-1. Sammanställning av erhållna kovarianser för fyra betongfabriker.

Fabrik	Kvalitet	Antal värden	$C(X_i, X_i)$	$C(X_i, X_{i+1})$	$C(X_i, X_{i+2})$	Medelvärde (MPa)
1	K250	195	17.62	11.35	8.60	30.0
	K400	525	15.04	7.77	5.26	47.2
2	K250	177	14.27	7.59	5.03	32.0
	K400	333	11.07	5.97	3.60	46.7
3	K250	282	22.66	13.24	10.00	31.7
	K400	396	21.76	14.57	10.03	49.4
4	K250	273	9.27	4.96	2.97	30.4
	K400	609	14.69	7.91	5.53	46.3

För att kunna gå vidare erfordras resultat från provningen av fabriksbetong.

Sammanställs erhållna data från provning av fabriksbetong under åren 1965 - 1974 erhålls en förteckning av seriemedelvärden, antal serier, standardavvikelse för seriemedelvärden och variationskoefficienter. Denna sammanställning är redovisad i TAB 5-2 och avser samtliga fabriker.

TAB 5-2. Medelvärden och standardavvikelser i MPa för
seriemedelvärden under åren 1965 - 1974.
Tillverkningsklass 1.

Hållfast- hetsklass	År	Serier	Medel- värde	Stan- dardav- vikelse	Variations- koefficient (%)
K150	1965	0	0	0	0
	1966	0	0	0	0
	1967	451	22.6	4.7	21
	1968	612	23.1	4.5	19
	1969	718	23.0	4.6	20
	1970	812	23.2	4.8	21
	1971	789	22.9	4.5	19
	1972	848	23.6	4.6	20
	1973	707	23.9	4.4	18
	1974	330	23.1	4.2	18
	Tot	5267	23.2	4.56	
K200	1965	0	0	0	0
	1966	1411	27.8	4.2	15
	1967	1632	28.0	4.1	15
	1968	1893	28.4	4.1	14
	1969	2120	28.3	4.3	15
	1970	2371	28.6	4.4	15
	1971	2534	28.2	4.1	15
	1972	2700	28.6	3.9	14
	1973	2405	29.0	4.1	14
	1974	1121	28.7	4.3	15
	Tot	18187	28.4	4.16	
K250	1965	7431	33.3	4.3	13
	1966	9090	33.0	4.3	13
	1967	10467	32.9	4.2	13
	1968	10949	33.4	4.2	13
	1969	11713	33.2	4.3	13
	1970	12081	33.6	4.3	13
	1971	11902	33.4	4.2	13
	1972	11605	33.6	4.1	12
	1973	10403	34.1	4.2	12
	1974	4862	33.3	4.1	12
	Tot	100503	33.4	4.22	

forts.n.sida

TAB 5-2. Fortsättning från föregående sida.

Hållfast- hetsklass	År	Serier	Medel- värde	Stan- dardav- vikelse	Variations- koefficient (%)
K300	1965	3611	40.1	5.0	12
	1966	4410	40.2	5.2	13
	1967	1679	39.1	4.6	12
	1968	3066	39.8	4.8	12
	1969	3420	39.4	4.8	12
	1970	3937	40.0	4.8	12
	1971	3594	39.5	4.8	12
	1972	3360	39.8	4.7	12
	1973	3362	40.4	4.7	12
	1974	1839	39.2	4.5	11
Tot		32278	39.8	4.83	
K300V vattentät	1965	0	0	0	0
	1966	0	0	0	0
	1967	3085	40.5	5.2	13
	1968	2963	41.4	5.1	12
	1969	3331	40.8	5.1	13
	1970	3970	41.0	4.9	12
	1971	4379	40.6	4.9	12
	1972	4507	40.8	4.7	12
	1973	4093	41.3	4.6	11
	1974	1790	40.3	4.7	12
Tot		28118	40.9	4.89	
K350	1965	1223	45.3	5.0	11
	1966	1530	46.4	6.3	13
	1967	1515	44.9	5.1	11
	1968	1845	45.9	5.1	11
	1969	2328	45.1	5.1	11
	1970	2974	45.3	5.0	11
	1971	2533	44.7	4.9	11
	1972	2817	45.1	4.8	11
	1973	2553	45.4	4.5	10
	1974	1308	44.5	4.7	10
Tot		20626	45.3	5.02	
K400	1965	1532	50.4	5.5	11
	1966	2289	50.8	5.3	10
	1967	3619	51.3	5.7	11
	1968	5196	51.1	5.4	10
	1969	6771	50.1	5.4	11
	1970	9478	50.0	5.3	11
	1971	10041	49.7	5.3	11
	1972	9991	50.3	5.1	10
	1973	9701	50.4	5.1	10
	1974	5267	48.9	5.0	10
Tot		63885	50.2	5.26	

forts.n.sida

TAB 5-2. Fortsättning från föregående sida.

Hållfast- hetsklass	År	Serier	Medel- värde	Stan- dardav- vikelse	Variations- koefficient (%)
K450	1965	0	0	0	0
	1966	0	0	0	0
	1967	330	56.9	5.5	10
	1968	421	55.9	4.6	8
	1969	568	54.2	4.7	9
	1970	754	55.5	5.2	9
	1971	668	55.9	4.5	8
	1972	643	56.1	4.4	8
	1973	497	55.6	4.9	9
	1974	266	55.2	4.3	8
	Tot	4147	55.6	4.78	
K500	1965	0	0	0	0
	1966	0	0	0	0
	1967	882	61.4	5.4	9
	1968	1386	60.6	4.9	8
	1969	2203	58.8	5.6	10
	1970	2713	59.6	5.2	9
	1971	2314	60.5	4.9	8
	1972	2199	61.4	5.1	8
	1973	2462	59.8	4.5	8
	1974	1320	58.7	4.5	8
	Tot	15479	60.0	5.03	
K550	1965	0	0	0	0
	1966	0	0	0	0
	1967	0	0	0	0
	1968	1	76.0	0	0
	1969	0	0	0	0
	1970	3	67.7	4.5	7
	1971	6	63.6	5.5	9
	1972	102	68.2	3.8	6
	1973	111	65.1	5.1	8
	1974	2	59.0	2.8	5
	Tot	225	66.5	4.54	
K600	1965	0	0	0	0
	1966	0	0	0	0
	1967	0	0	0	0
	1968	88	71.1	4.1	6
	1969	427	70.3	5.0	7
	1970	607	68.8	5.4	8
	1971	630	69.3	3.7	5
	1972	545	69.4	3.2	5
	1973	892	68.6	5.1	7
	1974	520	68.9	6.4	9
	Tot	3709	69.2	4.89	

Till resultaten fogas en undersökning av spridning mellan fabriker. Här har utnyttjats redovisade fabriksresultat under ett år för kvaliteterna K250 och K400. Skrivs kubhållfasthetens seriemedelvärde X_{ij} som

$$X_{ij} = X_m + U_i + V_{ij} \quad (5-6)$$

där U_i nu betecknar variationen av fabriksmedelvärden kring riksmedelvärdet och V_{ij} betecknar variationen av seriemedelvärdet kring fabriksmedelvärdet, erhålles variansen för fabriksmedelvärden till

$$V(\bar{X}_i) = \sigma_U^2 + \frac{\sigma_V^2}{n_j} \quad (5-7)$$

där σ_U är standardavvikelsen för fabriksmedelvärden

σ_V är standardavvikelse för seriemedelvärden

n_j är antalet serier för fabrik i.

Ett värde på n_j på 30 bedöms vara tillräckligt för att reducera inverkan av σ_V till försumbart värde. Utförs beräkningen med det villkoret att fabriker med ett antal serier understigande 30 ej tas med erhålles för K250

$$\begin{aligned} \sigma_U &= 2.22 \\ n_j &= 130 \end{aligned} \quad (5-8)$$

medelvärde 33.5

resp. för K400

$$\begin{aligned} \sigma_U &= 2.75 \\ n_j &= 95 \end{aligned} \quad (5-9)$$

medelvärde 50.1.

Standardavvikelsen för den högre kvaliteten är störst. Samma förhållande erhålls för standardavvikelsen mellan serier (TAB 5-2).

Resultaten i TAB 5-1 viktas samman enligt uttrycket

$$R_i = \frac{\sum_{j=1}^4 n_j R_j}{\sum_{j=1}^4 n_j} \quad (\text{gäller approximativt för stora } n_j)$$

vilket ger för K250

$$R_0 = C(X_i, X_i) = 16.06$$

$$R_1 = C(X_i, X_{i+1}) = 9.33 \quad (5-10)$$

$$R_2 = C(X_i, X_{i+2}) = 6.69$$

resp. för K400

$$R_0 = 15.64$$

$$R_1 = 8.94 \quad (5-11)$$

$$R_2 = 6.07$$

Ekv. 5-5 ger nu för K250 variansen för seriemedelvärdet $\bar{X}_3$

$$V(\bar{X}_3) = 10.99 \quad (5-12)$$

och för K400

$$V(\bar{X}_3) = 10.54 \quad (5-13)$$

Förhållandet mellan $V(\bar{X}_3)$ och $V(X)$ skattas nu ur uttrycken (5-10), (5-11) och (5-13) och ger för K250

$$V(\bar{X}_3) = \frac{10.99}{16.06} \cdot V(X) = V(X) / 1.46 \quad (5-14)$$

och för K400

$$V(\bar{X}_3) = V(X) / 1.48 \quad (5-15)$$

Det ligger nära till hands att ansätta

$$V(\bar{X}_3) = V(X) / 1.47 \quad (5-16)$$

för samtliga kvaliteter. Göres detta erhålles värden enligt TAB 5-3 där varianser för seriemedelvärden, inbegripet spridning mellan fabriker, hämtats ur TAB 5-2. Spridning mellan fabriker har, med ledning av uttryck 5-8 och 5-9, satts till $\sqrt{V(X_f)} =$
 $= 2.5 (= \sqrt{\frac{2.22^2 \cdot 129 + 2.75^2 \cdot 94}{223}}).$

TAB 5-3. Sammanställning av medelvärden och standardavvikelser för olika betongkvaliteter.

Kvalitet	$V(\bar{X}_3) + V(X_f)$	$V(\bar{X}_3)$	$V(X)$	$V(X) + V(X_f)$	σ_x	$\bar{X}$
K150	20.79	14.54	21.37	27.62	5.26	23.2
K200	17.31	11.06	16.26	22.51	4.75	28.4
K250	17.81	11.56	16.99	23.24	4.82	33.4
K300	23.33	17.08	25.11	31.36	5.60	39.8
K300V	23.91	17.66	25.96	32.21	5.68	40.9
K350	25.20	18.95	27.86	34.11	5.84	45.3
K400	27.67	21.42	31.49	37.74	6.14	50.2
K450	22.85	16.60	24.40	30.65	5.54	55.6
K500	25.30	19.05	28.00	34.25	5.85	60.0
K550	20.61	14.36	21.11	27.36	5.23	66.5
K600	23.91	17.66	25.96	32.21	5.68	69.2

Ett försök att etablera ett samband mellan standardavvikelsen och medelvärdet med hjälp av linjär regression ger som resultat

$$\sigma_x = 0.0139 \cdot \bar{X} + 4.84 \quad (5-17)$$

Ett slaviskt brukande av EKV (5-17) ger som resultat nya standardavvikelser redovisade i TAB 5-4. Korrelationskoefficienten för regressionslinjen blir dock endast 0.49 vilket medför att de i TAB 5-4 framräknade värdena är till föga nytta.

TAB 5-4. Medelvärden och standardavvikelser beräknade med linjär regression för olika betongkvaliteter.

Kvalitet	Medelvärde (MP _a)	Standardav- vikelse (MP _a)	Variations- koefficient
K150	23.2	5.17	0.223
K200	28.4	5.24	0.185
K250	33.4	5.31	0.159
K300	39.8	5.40	0.136
K300V	40.9	5.41	0.132
K350	45.3	5.47	0.121
K400	50.2	5.54	0.110
K450	55.6	5.62	0.101
K500	60.0	5.68	0.095
K550	66.5	5.77	0.087
K600	69.2	5.80	0.084

Som ekv. 5-17 visar är beroendet mellan kubhållfasthetens medelvärde och standardavvikelse svagt. Detta framgår även om talparen plottas i ett diagram. FIG 5-13 visar en ungefärlig årsproduktion i svenska fabriker medan FIG 5-14 illustrerar det samma men endast kvaliteterna K250 och K400 medtagna. Ingen av figurerna ger intryck av att något större beroende mellan variablerna föreligger.

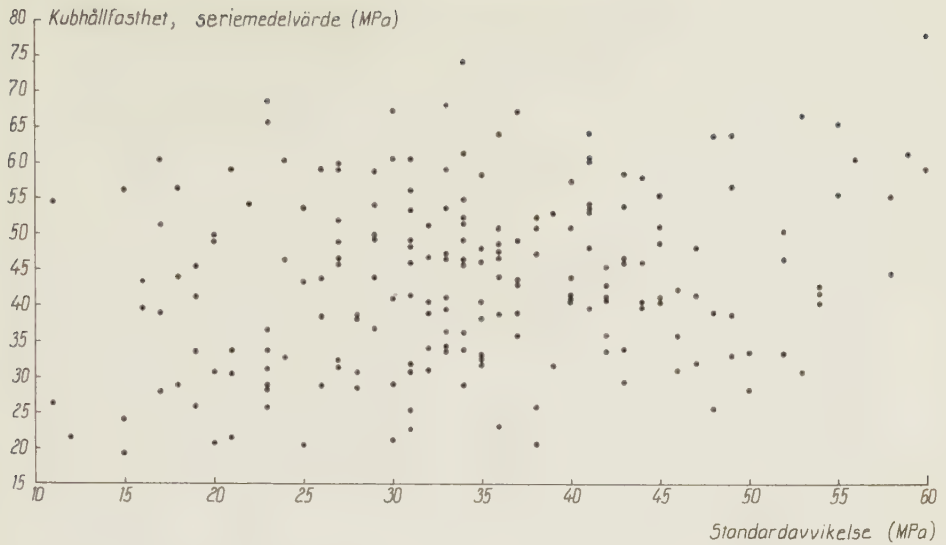


FIG 5-13. Plottade talpar = medelvärde och standardavvikelse för seriemedelvärden - för en årsproduktion.

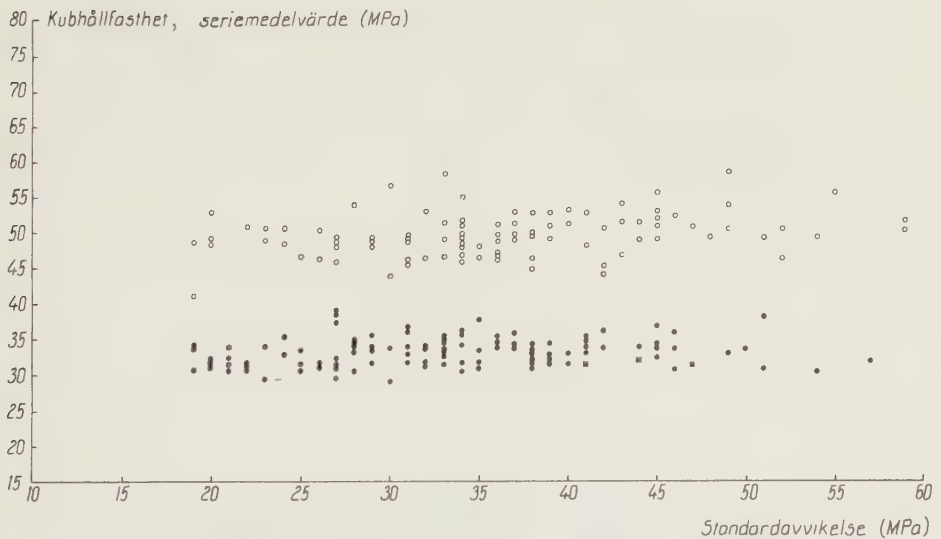


FIG 5-14. Medelvärde och standardavvikelse för seriemedelvärden för K250 (•) och K400 (o) under cirka ett år.

Histogram för seriemedelvärden för samtliga kvaliteter finns redovisade i BIL. B. Försök har gjorts att anpassa normal- och lognormalfördelningar med varierande resultat och med tvivelaktig nytta eftersom parametervärden för enskilda värden är mest intressanta. Mer fruktbart är emellertid värderingen av lägsta värden. Överskrides tillåten andel undertramp hos någon fabrik träder kontrollavdelningen in, analyserar orsakerna och föreslår eventuella förstärkningsåtgärder i de fall den kontrollerade betongmassan befinner sig i färdig konstruktion. De enskilda kubvärden som orsakat låga seriemedelvärden noteras normalt inte varför de också blir svåra att komma åt i en i efterhand gjord statistisk utvärdering. Vad seriemedelvärden beträffar så är materialet lätt åtkomligt för behandling. Studeras provningsresultat från 10 års betongproduktion erhålles uppgifter om de undertramp som förekommit vad avser seriemedelvärden. Samtidigt ges information om de lägsta värden som erhållits och i detta sammanhang bör man komma ihåg att alla undertramp som understiger 0.8 ggr K-värdet ger impuls till en närmare utredning från kontrollavdelningens sida.

Orsaken till att låga värden erhålles påverkar deras klassificering - låga värden eller grova fel. Det är inte ovanligt att de låga värdena grupperar sig i princip enligt FIG 5-15 där de enstaka låga värdena, normalt mindre än $0.8 \times K$, föranleder extra åtgärder och ofta visar sig bero på bl.a. förväxling av kvaliteter vid märkning eller vid provning.



FIG 5-15. Principutseende hos undre svansen för betongs kubhållfasthet.

En detaljredovisning av låga värden, här definierat som värden under fordrat värde, för olika betongkvaliteter under en tio-års period visas i FIG 5-16 till 5-26. Klassindelningen av materialet har gjorts med klassbredden 0.5 MPa.

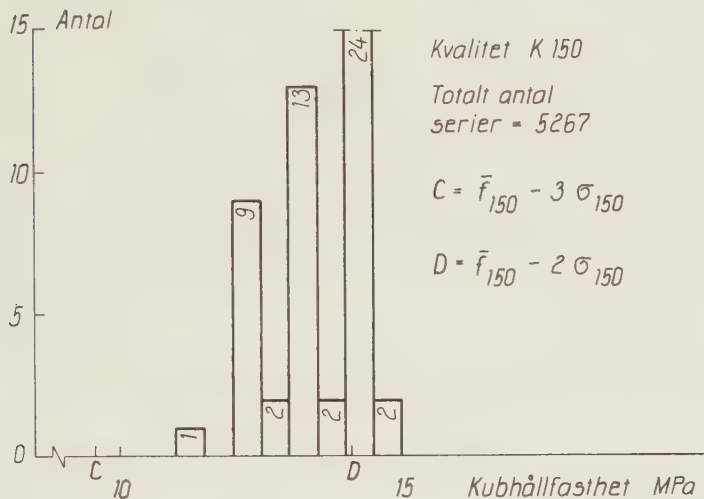


FIG 5-16. Utfall av låga seriemedelvärden för kvalitet K150.

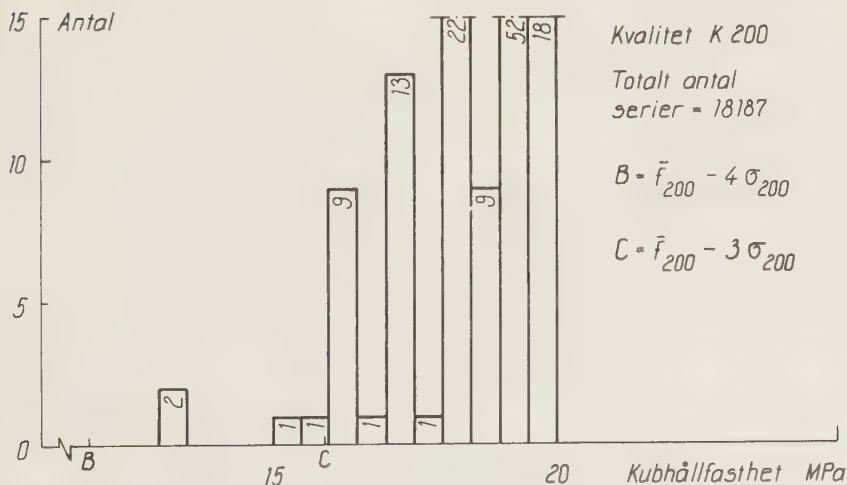


FIG 5-17. Utfall av låga seriemedelvärden för kvalitet K200.

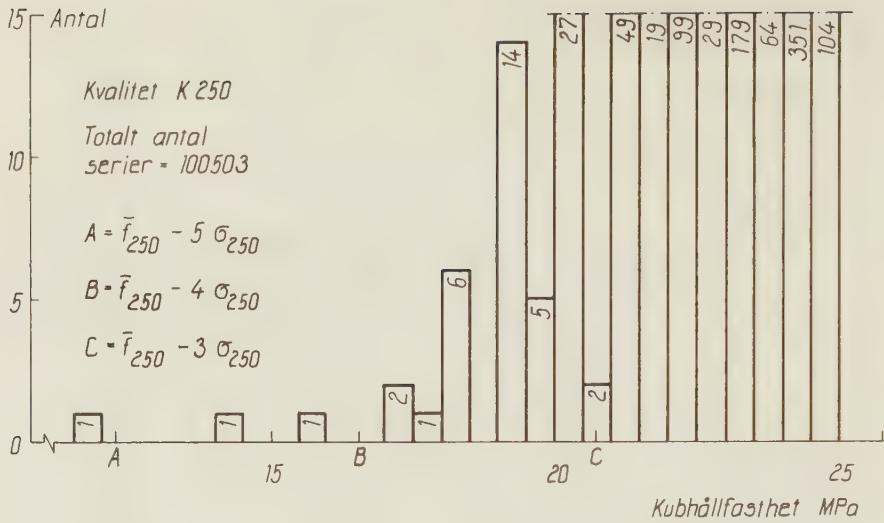


FIG 5-18. Utfall av låga seriemedelvärden för kvalitet K250.

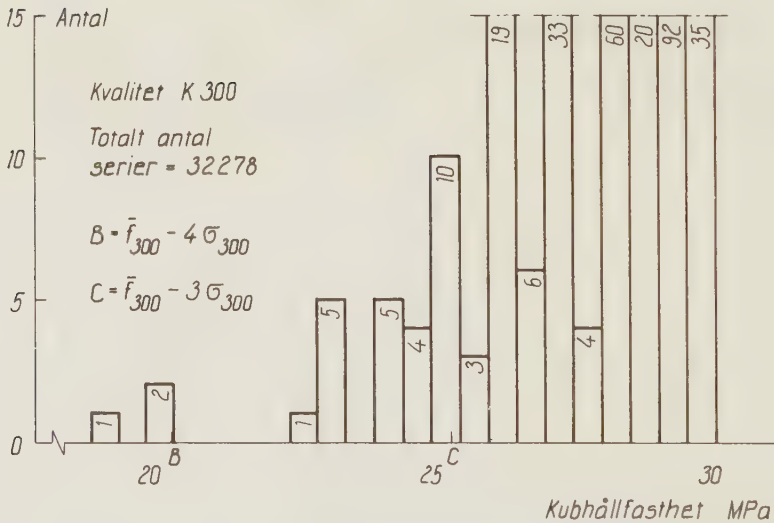


FIG 5-19. Utfall av låga seriemedelvärden för kvalitet K300.

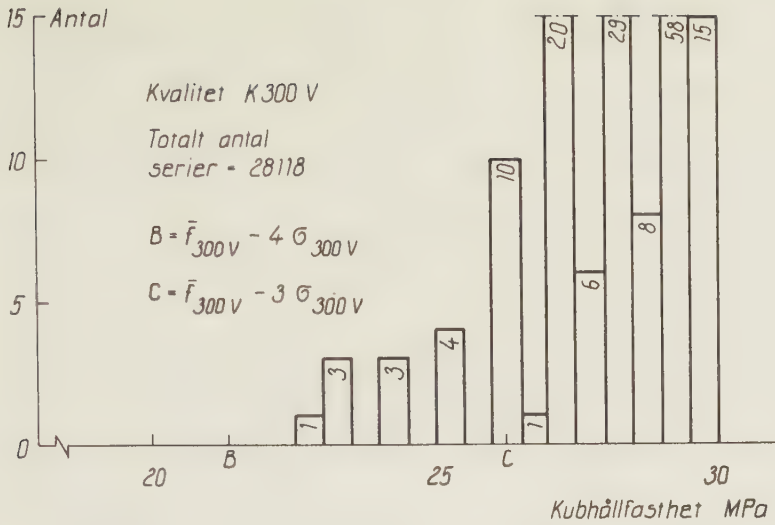


FIG 5-20. Utfall av låga seriemedelvärden för kvalitet K300V.

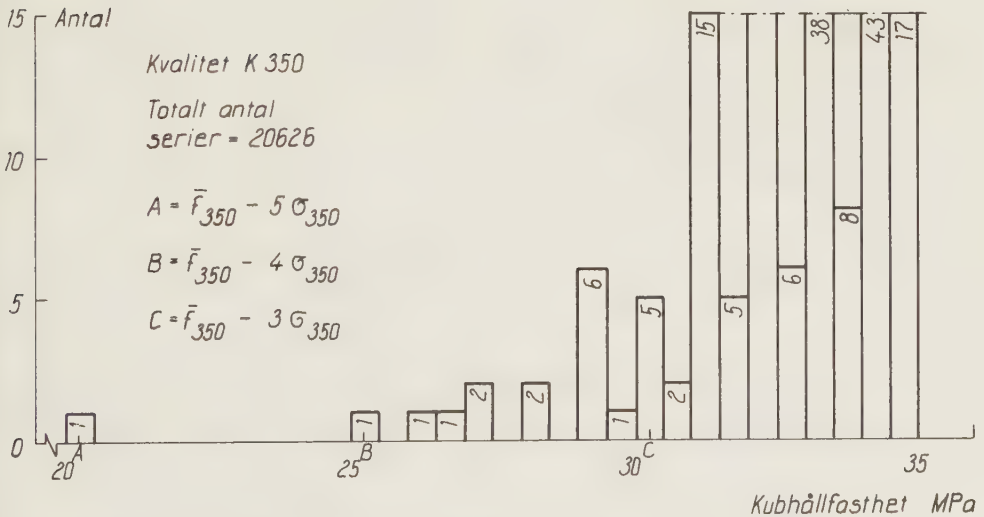


FIG 5-21. Utfall av låga seriemedelvärden för kvalitet K350.

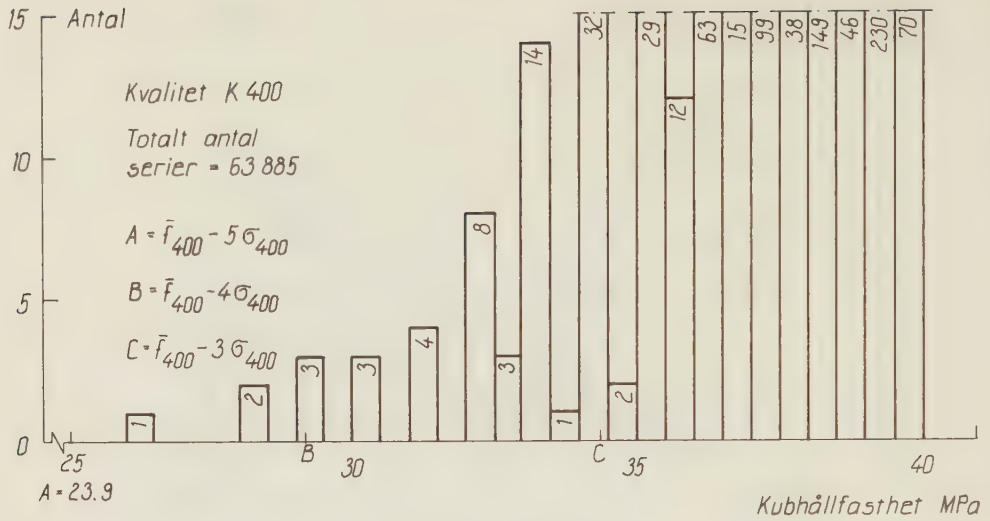


FIG 5-22. Utfall av låga seriemedelvärden för kvalitet K400.

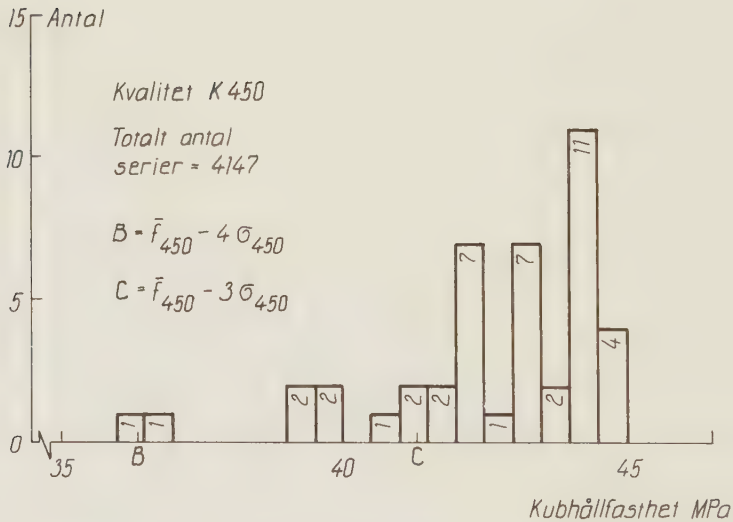


FIG 5-23. Utfall av låga seriemedelvärden för kvalitet K450.

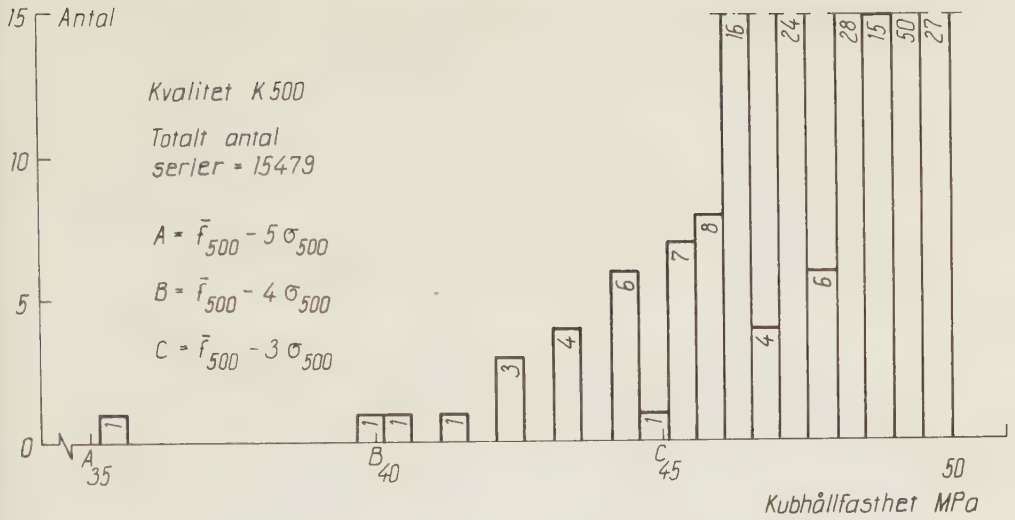


FIG 5-24. Utfall av låga seriemedelvärden för kvalitet K500.

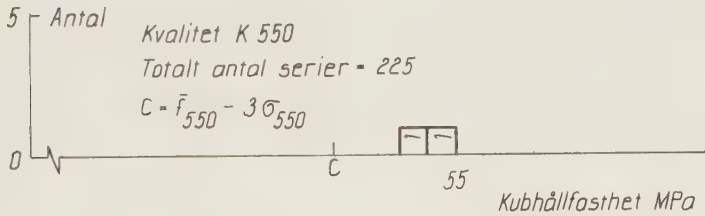


FIG 5-25. Utfall av låga seriemedelvärden för kvalitet K550.

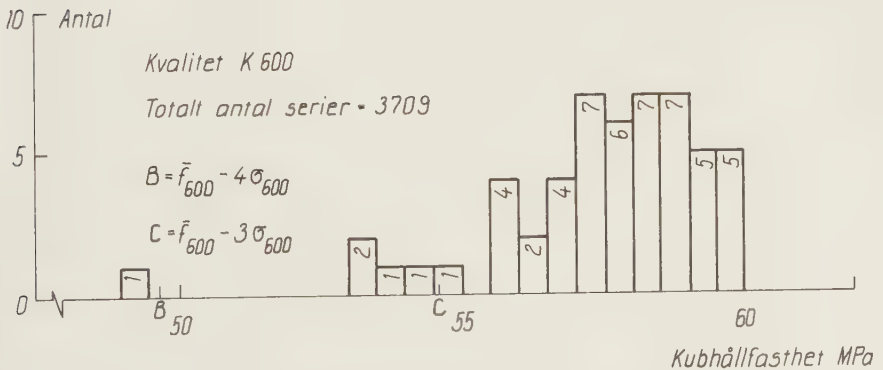


FIG 5-26. Utfall av låga seriemedelvärden för kvalitet K600.

En bearbetning av de i figurerna redovisade resultaten ger resultat sammanställda i TAB 5-5. Under antagande av normalfördelade seriemedelvärden skulle inte något värde understiga 5σ -kvantilen för någon kvalitet. Så har ej heller skett vad utfallet beträffar. Utfallen för 2σ - och 3σ -kvantilerna är mindre än de teoretiska som beräknats med antagande om normalfördelning. För 4σ -kvantilen erhålles varierande resultat i detta avseende vilket är naturligt eftersom utfallet, verkligt och beräknat, endast är ett fåtal enheter.

Bedömningen av lägsta värde blir också beroende av antal tillgängliga provvärden liksom av orsaken till att lågt värde erhållits. I de fall att tillåten andel undertramp överskrides eller att enskilda värden ej når upp till $0.8 \times K$ föranleder detta åtgärder i någon form. Utfallet av undersökta seriemedelvärden ger beskedet att en undre gräns för seriemedelvärdet torde hamna i intervallet $0.65K - 0.8K$. TAB 5-6 ger besked om de erhållna lägsta värdena för olika betongkvaliteter där vid bedömningen viss hänsyn tagits till sannolikheten för att vissa låga värden sannolikt inte tillhör fördelningen. Med hjälp av i BIL E framräknade gränsvärden kan man bortse från de lägsta värdena för kvaliteterna K250, K350 och K500.

TAB 5-5. Sammanställning över erhållna och beräknade fraktilvärden under antagande om normalfördelning.

Fraktiler				
Hållfasthetsklass	MPa	Teoretiskt utfall	Verkligt utfall	Verkligt Teoretiskt
<u>m-2σ</u>				
K150	14.08	120	27	0.23
K200	20.08	415	129	0.31
K250	24.96	2292	954	0.42
K300	30.14	736	300	0.41
K300V	31.12	641	237	0.37
K350	35.26	470	176	0.38
K400	39.68	1457	754	0.52
K450	46.04	95	69	0.73
K500	49.94	353	203	0.58
K550	57.42	5	6	1.20
K600	59.42	85	48	0.57
<u>m-3σ</u>				
K150	9.52	7	0	0
K200	15.92	25	4	0.16
K250	20.74	136	3	0.02
K300	25.31	44	28	0.64
K300V	26.23	38	11	0.29
K350	30.24	28	15	0.54
K400	34.42	86	71	0.83
K450	41.26	6	9	1.50
K500	44.91	21	18	0.86
K550	52.88	0	0	-
K600	54.53	5	5	1.00
<u>m-4σ</u>				
K150	4.96	0	0	-
K200	11.76	1	0	0
K250	16.52	3	1	0.33
K300	20.48	1	3	3.00
K300V	21.34	1	0	0
K350	25.22	1	1	1.00
K400	29.16	2	3	1.50
K450	36.48	0	1	-
K500	39.88	0	2	-
K550	48.34	0	0	-
K600	49.64	0	1	-

TAB 5-6. Sammanställning över erhållna låga seriemedelvärden.

Hållfast- hetsklass	Antal serier	Medel- värde (MPa)	Standad- avvikelse (MPa)	Antal serier < K	Andel serier < K	m-0.8K σ	m-0.65K σ	Lägsta obser- verade klass- gräns, mätt i antal σ från medelvärdet
K150	5267	23.2	4.56	53	0.0100	2.46	2.94	2.67
K200	18187	28.4	4.16	129	0.0071	2.98	3.70	3.70
K250	100503	33.4	4.22	954	0.0095	3.18	4.06	4.60
K300	32278	39.8	4.83	300	0.0093	3.27	4.20	4.31
K300 V	28118	40.9	4.89	158	0.0056	3.46	4.38	3.76
K350	20626	45.3	5.02	176	0.0085	3.45	4.49	4.04
K400	63885	50.2	5.26	824	0.0130	3.46	4.60	4.60
K450	4147	55.6	4.78	43	0.0100	4.10	5.51	4.10
K500	15479	60.0	5.03	203	0.0130	3.98	5.47	4.08
K550	225	66.5	4.54	2	0.0089	4.96	6.77	2.75
K600	3709	69.2	4.89	53	0.0140	4.34	6.18	4.13

5.2.1.1 Tryckhållfasthet hos betong

Tryckhållfastheten i färdig konstruktion beror av kubhållfastheten och beroendet antas kunna skrivas

$$f_{C, \text{konstr}} = C f_{CC}^k \quad (5-18)$$

där C och k är konstanter.

Bellander har sammanställt utförda undersökningar och genom regressionsanalys bestämt konstanternas värden till

$$C = 1.18 \quad (5-19)$$

$$k = 0.913$$

Sammanlagt 55 konstruktioner ligger till grund för bestämningen av konstanterna varvid standardavvikelsen för residualerna, dvs avvikelserna från regressionslinjen blev 5.7 MPa.

Värdet 5.7 MPa är angivet under förutsättning att standardavvikelsen är oberoende av hållfasthetsnivån vilket ej synes vara fallet om sammanhängande talpar ($f_{c, \text{konstr}}$, f_{cc}) plottas i ett diagram.

Att utnyttja information om standardavvikelsen i någon additiv modell synes därför inte vara meningsfullt. Försök att beräkna en standardavvikelse för hållfasthet i färdig konstruktion med en dylik modell utmynnar också mycket riktigt i erfarenhetsmässigt för stora värden på standardavvikelsen.

I litteraturen redovisade undersökningar rörande skillnader mellan hållfasthet i konstruktion och i laboratorium erhålles likvärdig standardavvikelse för prover uttagna ur konstruktionen som för normprov. Det finns därför ingen anledning att med grova metoder försöka finna värden på standardavvikelsen för hållfasthet i färdig konstruktion. Här väljs att acceptera att de värden på standardavvikelsen som angivits i TAB 5-3 även får utgöra mått på standardavvikelsen för hållfasthet i färdig konstruktion.

Enligt (5-18) och (5-19) kan emellertid medelvärdet av hållfasthet i färdig konstruktion skattas med

$$\overline{f_{c, \text{konstr}}} = 1.18 \overline{f_{cc}}^{0.913} \quad (5-20)$$

Skattningen är väntevärdesriktig i det logaritmiska rummet varför skattning enligt (5-20) innebär en viss approximation. Från inverkan av denna approximation bortses här och medelvärdet för hållfasthet i konstruktion beräknat enligt (5-20) redovisas i TAB 5-7.

TAB 5-7. Betongtryckhållfasthet i färdig konstruktion. Medelvärde och standardavvikelse för olika betongkvaliteter.

Kvalitet	Tryckhållfasthet hos normkub		Tryckhållf. i färdig konstr.	$f_{cc}^{konstr.}$
	medelvärde (MPa)	standardavvikelse (MPa)	medelvärde (MPa)	f_{cc}^{kub}
K150	23.2	5.26	20.8	0.90
K200	28.4	4.75	25.1	0.88
K250	33.4	4.82	29.0	0.87
K300	39.8	5.60	34.1	0.86
K300V	40.9	5.68	35.0	0.86
K350	45.3	5.84	38.4	0.85
K400	50.2	6.14	42.1	0.84
K450	55.6	5.54	46.3	0.83
K500	60.0	5.85	49.6	0.83
K550	66.5	5.23	54.5	0.82
K600	69.2	5.68	56.5	0.82

5.2.1.2 Draghållfasthet hos betong

Relationen mellan draghållfasthet och kubhållfasthet för betong är i sig vanskelig att modellera. Olika egenskaper inverkar i olika grad på betongens egenskaper. Mätes draghållfastheten genom någon form av direktbestämning kan man naturligtvis tillgodogöra sig en mindre spridning till följd av att den sökta egenskapen provas direkt. Ska draghållfastheten härledas ur kubhållfasthet måste man acceptera att precisionen i omdömet minskar därför att överföring mellan olika egenskaper inte kan representeras med ett entydigt samband. Nu behövs värden på betongs draghållfasthet vid dimensionering varför man tvingas acceptera en modell som bevisligen har sina brister. Orsaken är främst den tradition som finns inom betongteknologin - att korrelera utförda försök med betongens tryckhållfasthet oavsett vilka egenskaper som är karakteristiska för försöksresultatet.

Till modellrelation mellan draghållfasthet och tryckhållfasthet föreslås ett rotuttryck enligt

$$\bar{f}_{ct} = \xi \sqrt{\bar{f}_{cc}} \quad (MPa) \quad (5-21)$$

Koefficienten ξ bestäms ur en försöksserie redovisad av Nylander som anger medelvärden för tryckhållfasthet och draghållfasthet hos betong som använts i försöken.

Bildas nu kvoter $\xi_i = \bar{f}_{cti} / \sqrt{\bar{f}_{cci}}$ kan medelvärde och variationskoefficient för koefficienten ξ beräknas.

Antal prov som ligger till grund för $\bar{f}_{cti}$ och $\bar{f}_{cci}$ är ej lika i alla fall varför kvoterna ξ_i ej blir likafördelade. Bortses från detta erhålles för 19 värden på ξ .

$$\bar{\xi} = 0.366 \quad (5-22)$$

$$\delta_{\xi} = 0.105$$

Bestämningen är utförd på en försöksserie kanske med betong levererad från ett enda tillverkningsställe. Här görs bedömningen att variationskoefficienten kan ökas till 0.15 för att beakta den ökade spridning som blir följden ifall fler försöksserier kunde ligga till grund för bestämningen av ξ .

Draghållfasthetens medelvärde erhålles nu approximativt enligt

$$\bar{f}_{ct} \approx \bar{\xi} \sqrt{\bar{f}_{cc}} \quad (5-23)$$

med

$$\bar{\xi} = 0.37 \quad (5-24)$$

$$\delta_{\xi} = 0.15$$

Antages ξ vara oberoende av f_{cc} kan även variansen för f_{ct} approximativt beräknas med uttrycket

$$V(g(x_1 \dots x_n)) \approx \sum_{i=1}^n V(x_i) \left(\frac{\partial g}{\partial x_i} \right)_{m_i}^2 \quad (5-25)$$

vilket ger

$$V(f_{CT}) \approx \bar{f}_{CC} \cdot V(\xi) + \frac{\bar{\xi}^2}{4 \bar{f}_{CC}} \cdot V(f_{CC}) \quad (5-26)$$

Värden grundade på de ovan givna relationerna och med värden för tryckhållfasthet hämtade ut TAB 5-3 ger data för draghållfasthet redovisade nedan i TAB 5-8.

TAB 5-8. Medelvärden och standardavvikelser för draghållfasthet hos betong.

Kvalitet	Medelvärde (MPa)	Standardavvikelse (MPa)	Variations- koefficient
K 150	1.78	0.335	0.188
K 200	1.97	0.339	0.172
K 250	2.14	0.356	0.167
K 300	2.33	0.387	0.166
K 300 V	2.37	0.391	0.165
K 350	2.49	0.407	0.163
K 400	2.62	0.425	0.162
K 450	2.76	0.436	0.158
K 500	2.87	0.452	0.158
K 550	3.02	0.469	0.155
K 600	3.08	0.479	0.156

För ökande betongkvalitet minskar inverkan av variation i kubhållfasthet och osäkerheter i överföringsfunktionen ξ dominerar variationskoefficientens värde. En metod där draghållfasthet hos betong direktbeständes skulle gynnsamt påverka variationskoefficientens storlek.

5.2.1.3 Elasticitetsmodul hos betong

Försök att uttrycka tryckhållfasthet som funktion av elasticitetsmodul har gjorts av ett flertal forskare ibland med avsikten att kunna uttala sig om betongens tryckhållfasthet om elasticitetsmodulen uppmätts med t.ex. dynamisk metod. Bästa precisionen erhålles i detta fall för låga hållfasthetsvärden och samhörande

låga värden på elasticitetsmodulen. Vid höga värden på modulen minskar omdömet styrka. Utförda försök visar att t.ex. E-modulen 40 GPa kan tilldelas betong med en tryckhållfasthet (mätt på cylinder) mellan 20 och 60 MPa - en synnerligen klen information.

Något omvänt blir förhållandet ifall elasticitetsmodul ska uttryckas som funktion av tryckhållfasthet. Nu ökar istället precisionen med stigande tryckhållfasthet. Att finna etablerade samband mellan elasticitetsmodul och tryckhållfasthet hos kuber provade enligt svensk standard har inte varit möjligt. Istället väljs här att hämta ett samband från utförda försök i Schweiz (Ros, 1937). Dessa resultat har bearbetats av Nielsen, 1979 som angivit hållfasthetsberoende elasticitetsmoduler enligt TAB 5-9.

TAB 5-9. Elasticitetsmodul som funktion av tryckhållfasthet enligt Nielsen.

Tryckhållfasthet (MPa)	Elasticitetsmodul		
	Medelvärde (MPa)	Standardavvikelse (MPa)	Variationskoefficient
20	29 000	4 000	14
40	37 000	3 000	8
60	40 000	2 000	5
80	42 000	2 000	5

Tryckhållfastheten som angivits i TAB 5-9 svarar mot en prismahållfasthet bestämd från samma prismor som givit värden på elasticitetsmodulen. Det har inte varit möjligt att erhålla uppgifter rörande lagringsförhållanden för dessa prismor. Antas dimensionerna hos provade prismor ha varit cirka 20 x 20 x 70 cm och provade torra kan en approximativ överföringsfaktor till svensk kub beräknas till $1.15 \cdot 1.08 = 1.24$. Den ena faktorn svarar då mot en förändring från prisma till kub med 20 cm sida, den andra motsvarar en skalning från kub med 20 cm sida till kub med 15 cm sida.

Nu är denna överföring mycket grov och betongteknologiskt ofullständig. Kännedom om för överföringsfaktorn andra viktiga faktorer som vattencementtal, ballasttyp, kvalitet, lagring etc påverkar starkt storleken på hållfasthetsskillnaden. Dessutom förutsätter relationen ovan att styva lastpåföringsplattor använts vid försöken. Används mellanlägg av viss typ mellan provkropp och lastpåförande platta närmar sig kubhållfastheten samma nivå som prismahållfastheten.

I en undersökning av Hughes och Bahramian 1965 kan ett förhållande på 1.37, medelvärdesbildat över fyra olika ballastmaterial, mellan kub- och prismahållfasthet beräknas.

Väljes här att låta uttrycket enligt Ros bestämma sambandet mellan elasticitetsmodul och tryckhållfasthet och antas förhållandet mellan tryckhållfasthet hos svensk kub och prismahållfasthet vid Ros försök vara 1.24 erhålls ett samband enligt nedan om statistisk utvärdering enligt Nielsen får ligga till grund.

Först sökes ett kontinuerligt samband mellan elasticitetsmodulens medelvärde och prismahållfasthet. Värdena givna i TAB 5-9 får bilda indata i en ansats

$$E = a \cdot f_c^b \quad (5-27)$$

vilken logaritmeras till

$$\log E = \log a + b \log f_c$$

Linjär regression ger nu

$$a = 13190$$

$$b = 0.2696$$

och korrelationskoefficienten 0.986, vilket kan motivera att ansatsen accepteras som en representation av förhållandet mellan $\bar{E}$ och f_c i TAB 5-9.

Samma typ av ansats görs nu för standardavvikelsen dvs

$$\sigma_E = c \cdot (f_c)^d$$

Efter logaritmering ger linjär regression

$$c = 20836$$

$$d = -0.5459$$

och korrelationskoefficienten 0.970, vilken även den ligger nära perfekt korrelation.

Antas standardavvikelsen opåverkad av provkroppsform skulle det slutliga uttrycket för samband mellan elasticitetsmodul och kub-hållfasthet bli

$$\bar{E} = 13190 (\bar{f}_{c, kub} / 1.24)^{0.2696} \quad (5-28)$$

medan standardavvikelsens uttryck blir

$$\sigma_E = 20836 (\bar{f}_{c, kub})^{-0.5459} \quad (5-29)$$

Uttrycket som beskriver medelvärdet är en produkt av omdöme snarare än undersökning vad relationen kub - prismahållfasthet beträffar. Det är därför intressant att se hur elasticitetsmodulen påverkas av ändrade relationer mellan kub- och prismahållfasthet. Nedanstående tabell visar beräknade medelvärden och standardavvikelser beräknade dels med relationen 1.24 mellan kub- och prismahållfasthet, dels med relationerna 1.0 ($0.8 \cdot 1.24$) och 1.55 ($1.25 \cdot 1.24$) mellan respektive hållfasthetsvärden.

TAB 5-10. Medelvärden och standardavvikelser för elasticitetsmodul hos betong för $n = f_{c,kub}/f_{c,prisma} = 1.0, 1.24, 1.55$.

Kvalitet	Medelvärde (GPa)			Standardavvikelse (GPa)
	$n = 1.0$	$n = 1.24$	$n = 1.55$	
K150	30.8	29.1	27.4	3.75
K200	32.5	30.7	28.9	3.35
K250	34.0	32.1	30.2	3.07
K300	35.6	33.6	31.6	2.79
K300 V	35.9	33.9	31.9	2.75
K350	36.9	34.8	32.8	2.60
K400	37.9	35.8	33.7	2.46
K450	39.0	36.8	34.6	2.32
K500	38.8	37.5	35.3	2.23
K550	40.9	38.6	36.3	2.11
K600	41.3	39.0	36.7	2.06

Elasticitetsmodulens medelvärde påverkas endast måttligt av variationer i relationen kub/prismahållfasthet. En ändring av hållfasthetsförhållandet med 25% ger en ungefärlig ändring av elasticitetsmodulens medelvärde med 6% ($\sim \sqrt[4]{1.25}$).

5.2.2 Hållfasthetsdata för armering

Produktionen av armeringsstål sker i Sverige huvudsakligen vid sju stycken stålverk vars ungefärliga årsproduktion är sammanlagt 650.000 ton. Samtliga svenska tillverkare är anslutna till Svensk Byggstålkontroll vilket innebär att begränsad byggkontroll får tillämpas. Tillverkningsprovning för kamstål omfattar ett flertal delar. Här behandlas dock endast den för bärförmågan väsentligaste parametern, dragprovningen.

Dragprovning förfarandet är reglerat i SIS 112110 vad avser mätnoggrannhet, belastningshastighet etc. Antal utvalda provenheter beror av partivikt och antal charger. Provningsurvalets storlek räknat på hela kontrollpartiet är av storleksordningen 0.006 o/oo. Motsvarande siffra för betong är 0.07 o/oo.

Ett underkänt prov behöver inte betyda att partiet avskiljs. Göres omprov och detta är godkänt kan hela partiet godkännas.

För de tillverkare som svarar för huvuddelen av produktionen gäller att värden som givit anledning till omprov eller omklassning ej registreras. Materialet ger därför ej tillräcklig information rörande låga hållfasthetsvärden.

Data har insamlats från några av de sju stålverken motsvarande en produktionsmängd av 370.000 ton armeringsstål. Materialen har sammanslagits för varje kvalitet och dimension. Någon särskild viktning av de olika delbidragen har inte gjorts då man kan anta att antalet provkroppar står i god proportion till produktionsvolymen. Även den stickprovskontroll som utföres genom Svensk Byggstålkontrolls försorg ingår i behandlingen. I detta fall är materialet inte uppdelat efter dimension utan varje kvalitet är sammanslagen till ett histogram. Data från Svensk Byggstålkontroll hänför sig till tre års provningar 1972 - 74.

Provningsresultaten har sammanställts i histogramform med klassbredden 10 MPa.

Till histogrammen har tre olika försök till fördelningsanpassning gjorts. Precis som för betong har normal- och lognormalfördelningar anpassats. Liksom för betong bestämmer huvudmassan av utfallet utseendet hos fördelningen i svansarna. I avsikt att med hjälp av en objektiv metod finna en bättre fördelning anpassad endast till den undre svansen har försök gjorts med att anpassa en potensfunktion till materialet. Potensfördelningen som använts skrives på formen

$$f(x) = \frac{c}{d - x_0} \left(\frac{x - x_0}{d - x_0} \right)^{c-1} \quad (5-30)$$

vilken påminner om utseendet hos nedre svansen för en Weibullfördelning.

Parametern d är kurvans slutpunkt och sättes här till medelvärdet minus en standardavvikelse. Parametrarna c (exponenten) och x_0 (startvärdet) skattas genom maximum-likelihoodmetod. Likelihoodfunktionen definieras som

$$L(x_0, c) = \prod_{i=1}^n f_x(x_i, x_0, c) \quad (5-31)$$

Väntevärdesriktiga skattningar av x_0 och c utgörs av de värden för vilka $L(x_0, c)$ har sitt maximum, dvs de värden som maximerar sannolikheten för det utfall man erhållit.

Skattningarna erhålles genom att först logaritmera likelihoodfunktionen, derivera med avseende på x_0 och c samt sätta derivatorna lika med noll. Då erhålles i ordning

$$\ln L(x_0, c) = n \ln c - n c \ln(d - x_0) + \quad (5-32)$$

$$+ (c-1) \sum_{i=1}^n \ln(x_i - x_0)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_0} = \frac{nc}{d-x_0} - (c-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i - x_0} = 0 \quad (5-33)$$

$$\frac{\partial L}{\partial c} = \frac{n}{c} + \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{x_i - x_0}{d - x_0} \right) = 0 \quad (5-34)$$

c kan lösas ut till

$$c = - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{x_i - x_0}{d - x_0} \right)} \quad (5-35)$$

vilket ger

$$n - \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{d - x_0}{x_i - x_0} \right)} + \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{x_i - x_0}{d - x_0} \right) = 0 \quad (5-36)$$

Ur denna ekvation löses x_0 genom iteration varefter även c kan beräknas.

Genom numerisk integration av de framtagna fördelningarna har följande sannolikheter beräknats för data från Svensk Byggstål-kontroll

1. Sannolikheten att nominellt värde underskrides
2. - " - " nominellt värde - 50 MPa underskrides
3. - " - " nominellt värde - 100 MPa underskrides

Tillvägagångssätt och noggrannhet vid den numeriska behandlingen är densamma som mer ingående beskrivs i kapitel 6.

Materialet uppvisar vissa egenskaper som måste hänföras till den matematiska behandlingen vid indelning av materialet i klasser. Sålunda finnes klasser som är nästan tomma medan närmaste grannar uppvisar mycket höga värden. Avrundningsfel vid klassindelningen torde medfört att vissa klasser gynnats på bekostnad av andra. En åtgärd som eliminerar problemet är att slå ihop klasser till ett färre antal. Här har detta inte gjorts eftersom parametervärdena i fördelningarna inte påverkats nämnvärt av en dylik förändring.

Ingångsdata i histogramform redovisas i BIL C och framräknade parametervärden framgår av nedanstående sammanställningar.

TAB 5-10. Medelvärde och standardavvikelse för undre sträckgränsen hos olika armeringskvaliteter.

a) Prov utförda vid svenska stålverk.

Kvalitet	Diameter (mm)	Antal prov	Medelvärde (MPa)	Standardavvikelse (MPa)
Ks 40	10	3618	489.4	39.6
	12	8230	489.9	36.9
	16	4449	483.0	38.2
	20	1057	457.3	34.2
	25	1565	472.9	39.5
	32	155	448.8	24.4
Ks 40 S	10	550	477.3	27.0
	12	3109	471.5	37.8
	16	1485	468.4	25.3
	20	963	456.3	22.9
	25	1620	454.8	25.7
	32	648	441.2	23.2
Ks 60	10	332	692.1	39.6
	12	1597	688.2	40.2
	16	1504	676.9	37.8
	20	95	653.8	13.4
	25	9	658.9	53.5
Ks 60 S	12	337	673.0	33.1
	16	216	684.5	30.2
	25	94	670.5	36.0

Forts. nästa sida.

b) Prov utförda av Svensk Byggstålkontroll

Kvalitet	Dia- meter (mm)	Antal prov	Medel- värde (MPa)	Standard- avvikelse (MPa)
Ks 40	Alla	1907	460.5	34.7
Ks 40 S	Alla	541	457.4	27.3
Ks 60	Alla	538	648.4	37.0

c) Prov utförda vid svenska stålverk där samtliga dimensioner sammanslagits.

Ks 40	Alla	19074	484.7	37.7
Ks 40 S	Alla	8375	464.0	30.4
Ks 60	Alla	3537	682.8	38.7
Ks 60 S	Alla	647	676.5	32.7

I den sistnämnda tabellavdelningen har viktning av de enskilda dimensionerna gjorts enligt uttrycken

$$\begin{aligned}
 \text{Medelvärde} \quad \bar{x} &= \sum_{i=1}^k n_i \bar{x}_i / \sum_{i=1}^k n_i \\
 \text{Standardavvikelse} \quad S &= \sqrt{\sum_{i=1}^k s_i^2 (n_i - 1) / \sum_{i=1}^k (n_i - 1)}
 \end{aligned}
 \tag{5-37}$$

där k är antalet dimensioner i en grupp.

n_i är antalet prov i grupp i .

s_i är standardavvikelsen för grupp i .

På grund av att armeringstillverkarna sorterat bort vissa mätvärden är det material från Svensk Byggstålkontroll som bäst ger besked om låga värden. Tyvärr är underlaget inte stort men för att visa storleksordningen på beräknade sannolikheter med olika fördelningsantaganden visas nedan som utlovat beräkningar gjorda på material från Svensk Byggstålkontroll.

TAB 5-11. Sammanställning av beräknat och erhållet utfall för data från Svensk Byggstålkontroll.

Kvalitet	Antal prov	Hållfastvärde (MPa)	Erhållet antal under-tramp	Fördelningsmodell					
				Normal		Lognormal		Potensfunktion	
				Ber slh för under-tramp	Erhållet antal Beräknat antal	Ber slh för under-tramp	Erhållet antal Beräknat antal	Ber slh för under-tramp	Erhållet antal Beräknat antal
Ks40	1907	400	7	$4.06 \cdot 10^{-2}$	0.090	$3.52 \cdot 10^{-2}$	0.104	$1.51 \cdot 10^{-2}$	0.243
		350	1	$7.23 \cdot 10^{-4}$	0.725	$1.41 \cdot 10^{-4}$	3.72	0	-
		300	0	$1.86 \cdot 10^{-6}$	0	$4.88 \cdot 10^{-9}$	0	0	-
Ks40 S	541	400	0	$1.79 \cdot 10^{-2}$	0	$1.35 \cdot 10^{-2}$	0	$3.10 \cdot 10^{-3}$	0
		350	0	$4.25 \cdot 10^{-5}$	0	$3.33 \cdot 10^{-6}$	0	0	-
		300	0	$4.20 \cdot 10^{-9}$	0	$4.34 \cdot 10^{-13}$	0	0	-
Ks60	538	600	15	$9.56 \cdot 10^{-2}$	0.292	$9.53 \cdot 10^{-2}$	0.293	$6.34 \cdot 10^{-2}$	0.440
		550	1	$3.94 \cdot 10^{-3}$	0.472	$2.04 \cdot 10^{-3}$	0.911	$8.83 \cdot 10^{-4}$	2.110
		500	0	$3.08 \cdot 10^{-5}$	0	$2.29 \cdot 10^{-6}$	0	$1.61 \cdot 10^{-6}$	0

6 FÖREKOMST OCH BETYDELSE AV GRÄNSER FÖR BASPARAMETRARNAS VÄRDEN

6.1 Allmänt om begränsningar hos värden

Kunskap om olika konstruktioner eller konstruktionsdelars bärande egenskaper kan endast erhållas om man i något skede utfört provning eller mätning av för bärförmågan bestämmande variabler. Denna provning eller mätning kan emellertid vara utförd på olika sätt. Det normala tillvägagångssättet är att göra så många provningar eller mätningar som möjligt för att få en bild av spridningen hos den egenskap som mätes. Detta låter sig göras vid t ex provning av olika materials hållfasthetsvärden då relativt små provkroppar kan tillverkas utan större kostnad. Något annorlunda förhåller det sig då man önskar veta bärförmågan hos en större färdig konstruktion. Ekonomin kanske endast tillåter ett enda fullskaleförsök som man tvingas tro på. Naturligtvis kan resultatet jämföras med modellförsök men överföringen är inte helt entydig och dessutom kostar det extra att tillverka mindre komponenter om man vill bibehålla den relativa skalan.

Alternativt kan den komplexa konstruktionen brytas upp i mindre delar vilkas egenskaper undersökes för sig. Den modell som beskriver den sammansatta konstruktionens uppförande blir i de flesta fall mer eller mindre förenklad i och med att en modell som man önskar skall vara lätthanterlig inte tar hänsyn till alla inverkan- de faktorer.

Ta t ex en enkel byggnadskonstruktion. Man är intresserad av bärförmågans storlek vid given lastställning. Ett stort antal provningar i fullskala ger naturligtvis den sökta bärförmågans medelvärde och spridning förutsatt att mätningsförhållandena inte ändrats med tiden. Förfaringssättet är dock något kostnadskrävande. Normalt provas uttagna provstavar av det material som konstruktionen är uppbyggd av varvid en viss brottlast noteras. För att möjliggöra överföring av erhållna hållfasthetsdata till andra dimensioner än provstavens beräknas en brottpåkänning genom

division med uppmätt yta. Med det nya måttet påkänning införes en osäkerhet nämligen den precision med vilken ytan mätts. Beroende på mätmetod och storlek hos provstycket avgörs från fall till fall vilken inverkan mätningssosäkerheten kan ha. Osäkerheten hos de erhållna resultaten beror ju även av mätfel eller avläsningsfel hos den kraftmätande utrustningen. Erhållna värden på brottpåkänningen kan sedan användas för att bestämma bärförmågan hos de enskilda delarna i konstruktionen, dock med viss avvikelse från de rätta värdena beroende på areaavvikelser från de nominella.

Bärförmågan hos bärverket eller bättre bärförmåga hos den mest ansträngda delen kan som tidigare betecknas som

$$R = M \cdot L \cdot I \quad (6-1)$$

där M är materialparameter
 L är dimensionsparameter
 I är en parameter som beskriver beräkningsmodellens trovärdighet

Om konstruktionen som helhet provats erhålles direkt fördelningen för R ur mätresultaten, förutsatt att tillräckligt många försök gjorts. Om istället, vilket är vanligare, parametrarna undersökes var för sig, erhålles fördelningar för de ingående variablerna vilket inte är liktydigt med att veta fördelningen för funktioner av variablerna i fråga. Ett specialfall är dock undantaget. Om variablerna M , L och I befinnes vara oberoende och lognormalfördelade blir också variabeln R lognormalfördelad. I övriga fall blir fördelningen för R mer eller mindre komplicerad om något analytiskt uttryck över huvud taget existerar. I de flesta fall måste en numerisk metod tillgripas för att finna fördelningen för bärförmågan R . Beräkningarna skulle underlättas betydligt om man kunde införa restriktioner i någon form på de variabler som bestämmer bärförmågan. Önskvärt, men inte alltid möjligt, vore att finna gränser så snäva att vissa variabler kunde betecknas med en konstant antingen beroende på ett litet variationsområde eller en liten inverkan på bärförmågans storlek. Naturliga

gränser för bärförmågevariabeln existerar alltid. Exempelvis måste effektiva höjden hos en armerad betongbalk nödvändigtvis vara större än noll men mindre än balkhöjden. Sådana naturliga gränser har i detta sammanhang mindre betydelse då de inte påverkar ett beslut om vilken vikt som skall läggas på i detta fall effektiva höjdens variation. Ett hänsynstagande till snävare gränser, om sådana existerar, bidrar till bättre utnyttjande av material dvs lägre dimensioneringsvärden. Detta visar sig framförallt längre fram då exempel på skaderiskberäkningar redovisas. Här illustreras problematiken endast med ett enkelt exempel.

Anta att bärförmågan hos en konstruktion beskrivs av en produkt av två oberoende variabler x och y . Anta också för enkelhets skull att dessa båda är rektangelfördelade, x i intervallet (a, b) och y i intervallet (c, d) . Situationen illustreras i FIG (6-1) där respektive frekvensfunktioner är avsatta längs koordinataxlarna.

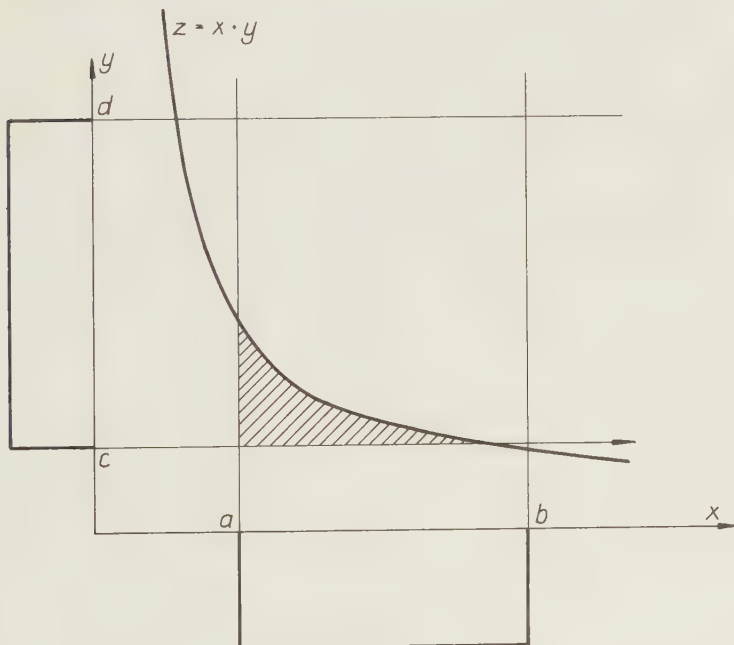


FIG 6-1. Frekvensfunktion för två oberoende rektangelfördelade variabler.

Tecknas därefter sannolikheten att produkten av variablerna skall understiga ett visst värde z erhålles

$$F_z(z) = P(xy \leq z) = \int_c^{z/a} \int_a^{z/y} \frac{1}{(d-c)(b-a)} dx dy \quad (6-2)$$

förutsatt att

$$z \leq b \cdot c \quad \text{och} \quad z \leq a \cdot d$$

i annat fall ändras integrationsgränserna. Utvecklas EKV (6-2) erhålles

$$F_z(z) = \frac{z(\ln z/a - \ln c - 1) + ac}{(d-c)(b-a)} \quad (6-3)$$

Anta därefter att någon form av restriktion kan läggas på a på ett sådant sätt att a kan ökas dvs ökad kännedom om variabeln a :s egenskaper medför att den gräns vilken variabeln a med säkerhet inte underskrider kan sättas högre. Om exempelvis variabeln a står för tjockleken hos en valsad plåt av standarddimension sätter den okunnige och försiktige ingenjören a till noll, vilket är hundraprocentigt säkert. Efter att ha gjort ett antal mätningar vågar han öka värdet på a . Hur mycket beror givetvis på resultatens utseende. Vad kan man vinna på att göra gränserna snävare? "Vinsten" framgår av TAB 6-1 där $F_z(z)$ dvs $P(x \cdot y \leq z)$ finns tabellerad för några olika a -värden. Övriga parametervärden har satts till

$$b = 50$$

$$c = 20$$

$$d = 80$$

$$z = 800$$

$$a = 10 - 40$$

TAB 6-1. Trunkeringens inverkan på rektangelfördelade variabler.

a	$F_z(z)$
10	0.212
12	0.177
14	0.148
16	0.124
18	0.104
20	0.0858
22	0.0704
24	0.0568
26	0.0449
28	0.0344
30	0.0251
32	0.0171
34	0.0104
36	0.00511
38	0.00144
40	0

Beträffande laster och deras eventuella begränsningar är problemställningen något annorlunda än för vad som gäller för bärformåga. Framför allt den övre begränsningen, vilket också är den mest intressanta, kan vara svår att uppskatta för flertalet laster. Undantag finns dock där den övre begränsningen är klart definierad t ex vattentryck i öppna behållare eller motsvarande. För en del fall ligger den praktiska gränsen långt utanför den som med mycket liten sannolikhet inträffar. Personlast i bostadsrum är ett exempel där trängsellastintensitet, som är den praktiska gränsen, ligger högt över höga fraktilvärden erhållna från lastundersökningar.

För vissa typer av naturfenomen inträffar alltid nya rekord, större nederbörd, varmaste dagen, största vindhastigheten etc. Frågan uppstår då om laster orsakade av naturen kan ha någon övre gräns. Problemet har diskuterats i litteraturen både teoretiskt och experimentellt. Under förutsättning att rekorden är slumpartade händelser dvs att alla permutationer av observationer är lika sannolika kan det förväntade antalet rekord härledas. Antalet rekord är en stokastisk variabel vars medelvärde vid n observationer här betecknas med E_n . Utan att behöva känna sannolikhetsfördelningen för antalet rekord kan väntevärdet E_n bestämmas direkt genom följande resonemang. Den maximala observationen m är det rekord som inträffar sist i en följd av n observationer. Två händelser uppfyller nu helt ett utfallsrum nämligen

- a) m är den n :te observationen vilket sker med sannolikheten $1/n$ och det förväntade antalet rekord är då $1 + E_{n-1}$
- b) m observeras före den n :te observationen vilket sker med sannolikheten $1 - 1/n$ och det förväntade antalet rekord är då E_{n-1} .

Ur a) och b) erhålles då att

$$E_n = \frac{1}{n} (1 + E_{n-1}) + (1 - \frac{1}{n}) E_{n-1} \quad (6-4)$$

vilket ger

$$E_n = E_{n-1} + \frac{1}{n} \quad (6-5)$$

dvs E_n erhålles ur summan

$$E_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (6-6)$$

I TAB 6-2 redovisas några resultat hämtade ur litteraturen. Den högra kolumnen visar resultat från 100 datorförsök där varje försök bestod i att en dator matade fram 1000 slumpstal och räknade antalet rekord i slumpstalsföljden. Medelvärden på de 100 försöken redovisas i tabellen.

TAB 6-2. Teoretisk och experimentell beräkning av antalet rekord.

Antal obser- vationer	Förväntat antal rekord (E_n)	Medelantalet rekord (datorförsök)
10	2.9290	2.80
20	3.5977	3.62
50	4.4992	4.72
70	4.8326	5.05
100	5.1874	5.43
200	5.8780	6.05
400	6.5699	6.73
600	6.9750	7.04
800	7.2625	7.30
1000	7.4855	7.45

Asymptotiskt då $n \rightarrow \infty$ erhålles det förväntade antalet observationer E_n ur uttrycket

$$E_n = 0.577 + \ln n \quad (6-7)$$

Resultatet innebär att nya rekord alltid kommer att inträffa om än mer och mer sällan förutsatt att fördelningen för variabeln i fråga är obegränsad. Detta medför att vad gäller övre gränsvärden på naturlaster måste dessa väljas med större försiktighet än motsvarande övre gränser för övriga laster och bärförmåga. Lastens art inverkar även på säkerhetsmättet på ett annat sätt som beskrives i avsnittet "Krav".

Trots att ingen övre gräns för lasten antagligen existerar finns det dock skäl till att sätta en dylik gräns. Val av lastvärden beror ju av den livslängd konstruktionen förväntas ha men även av lastnivåns värde. Det kan inte anses meningsfullt att t ex dimensionera för en snölast så stor att snödjupet på mark gör landet obeboeligt.

6.1.1 Laster

För laster gäller vanligtvis att kunskap om höga värden är av intresse. I normer anges lastvärden för t ex bjälklagslaster uppdelade på olika lokaltyper, vindlast och snölast. Dessa kan vara fraktilvärden från någon fördelning eller värden valda av erfarenhet på säkra sidan, underlaget kan vara väl underbyggt, men är det inte för alla fall. Känslan för noggrannheten vid bestämmandet av lastvärden kan bli avtrubbad om olika lasters värden upplevs som schabloner. Således kan nivåer hos vindlastvärden uppfattas som mindre motiverade än t ex skillnad i bjälklagslaster för olika lokaltyper kanske av den anledningen att bjälklagslaster upplevs mer påtagligt och frekvent än vindlast. Å andra sidan kan i vissa fall motsatt reaktion erhållas, då lastvärden för bjälklag inte upplevs som relevanta. Detta kan i sin tur bero på att andra effekter än de som avsetts observerats. T ex kan en normenlig bjälklagslast tyckas vara felaktigt vald om bjälklaget dimensioneras för statisk normlast men ändå sviktar när man går på det.

Resultat från utförda lastundersökningar på bjälklag hänför sig till senare år och därför är erfarenheterna rätt små. Undersökningar som givit utslag vid skrivning av normer är bl a arbeten utförda av Mitchell och Woodgate samt av Sentler, men ingen undersökning har ännu varit av sådan omfattning att fraktilvärden kunnat bestämmas med någon större precision. Utseendet hos fördelningarna har heller inte inbjudit till några konkreta antaganden. Lastundersökningarna inskränker sig i allmänhet till laster under brukstid. För vissa byggnader eller snarare bygg-

nadssätt är detta inte tillräckligt. Att erhålla fraktilvärden för laster är i sig inte ett självändamål utan målet är att minimera totalkostnaden för en byggnad. Det är därför rimligt att i bedömningen av uppkommande laster medta last under byggnadstiden. Det är inte vederhäftigt att för t ex en elementbyggd betongkonstruktion dimensionera i detalj efter planlösningen med olika sannolikheter och olika lastvärden för olika ytor om tyngden av betongelement med sannolikheten ett belastar delar av ytan någon gång under byggnadstiden. På samma sätt kan användandet av låga lastvärden medföra ökade kostnader under byggnadstiden genom att t ex endast vissa platser på bjälklaget är anvisade till virkesupplag och dylikt.

Något som har odiskutabel betydelse och som också framgått i lastundersökningar är bjälklagslastens ytberoende, vilket också börjar ge genklang i normtexter. Samma ytberoende föreligger säkert också vad beträffar vindlast men detta område är ej närmare behandlat ännu. Vindens karaktär av virvlar av olika intensitet och storlek vilka ger upphov till sugkrafter motiverar en reduktion av totala vindlasten vid stora ytor. Man kan tänka sig vinden ge upphov till en mängd "lokala tryck" färförskjutna i tid och rum över en yta. Efter lång anblåsningstid har varje liten delyta med stor sannolikhet drabbats av ett sådant "lokalt tryck", vilket anges till sitt maximumvärde. Sannolikheten att alla delytor, dvs totala ytan drabbas samtidigt av dessa maximala tryckkrafter är mindre ju fler delytorna är, vilket motiverar en reduktion av vindlasten vid större ytor jämfört med mindre för det fall att byggnadens stabilitet undersökes. Vad gäller infästningar är dessa beroende av krafter på delytorna och vindlasten förblir därför oförändrad i detta fall. Metoder för att reducera vindlastvärden vid stabilitetsberäkningar är föremål för intresse men ytterligare forskningsarbete återstår innan resultaten kan ge eko i byggnadsbestämmelser.

6.1.2 Mått

Dimensioner och dimensionsavvikelser regleras till stor del av toleransgränser vid tillverkning. Vid vissa typer av tillverkning kan toleransgränserna appliceras som en form av avskiljande kontroll. För byggnadskomponenter gäller detta i första hand för stål- och träprodukter samt för betong i viss mån vid elementtillverkning. För betong gäller vanligtvis att olika former av efterkontroll tillämpas t.ex. mätning av armeringsjärnens lägen i färdig konstruktion. Vad lägen hos armeringsjärn beträffar kan toleranser mätas och uppskattas men ej ofta påverkas så att i förväg uppsatta gränser kan erhållas i färdig konstruktion. För elementtillverkning i fabrik gäller dock andra betingelser beroende på tillverkningsprocedur. Förväntade avvikelser i platsgjutna konstruktioner måste normalt kompenseras genom att det genomsnittliga kravet höjs. I en statistisk verifikationsmetod kan inverkan av dylika måttavvikelser särskiljas förutsatt att statistiskt underlag föreligger. Inverkan av dimensionsavvikelser får härmed sin inverkan på bärförmågan separerad från övriga faktors inverkan.

Dimensionsavvikelser i armerade betongkonstruktioner har studerats av bl.a. Waris. Dimensionsavvikelser i makroskala som t.ex. initialkrokighet hos betongpelare påverkar naturligtvis också bärförmågans storlek. En undersökning av storleksordningen hos dylika dimensionsavvikelser har utförts av Andersson, Svedman och Wester som gjort mätningar på 55 cirkulära pelare av betong.

6.1.3 Hållfasthetsvärden

Krav på hållfasthetsvärden avser i huvudsak låga värden. Höga värden eftersträvas i allmänhet men inte alltid. Ett undantag kan vara att man är beroende av sprickbildning hos exempelvis en betongkonstruktion för att begränsa deformationer av t.ex. krympning. Den etablerade kvalitetskontrollen är dock enbart inriktad på att genom provning verifiera en minimihållfasthet eller fordrat värde.

För armering gäller att en viss andel av produktionsvolymen uttas till provning av tillverkaren. Väletablerade men statistiskt svår-bemästrade regler för uttag av prov och eventuella omprov medför att tolkning av provningsresultat i avsikt att finna fraktilvärden försvaras. Emellertid är samtliga svenska armeringstillverkare anslutna till Svensk Byggstälkontroll som ombesörjer kontrollprovning av partier i marknaden och vars resultat även kan ge underlag för statistisk värdering. Såväl för betong som för armering kan konstateras att begrepp om lägsta tillämpbara hållfasthetsvärden bör kunna uppställas.

6.2 Trunkerade fördelningar

Statistiska modeller som är förhållandevis lätta att handskas med och som relativt väl ansluter sig till erhållna samplingsvärden svarar inte alltid mot den uppfattning och de erfarenheter som finns beträffande extremvärden. Exempelvis ger en till en bärförmågeparameter anpassad normalfördelning en viss sannolikhet för att bärförmågan ska anta negativa värden. Å andra sidan medför en till materialet bättre anpassad fördelning normalt en mer svårhanterlig behandling vid användning av de statistiska beräkningsmetoderna. Ett sätt att lösa problemet vore att behålla de för de statistiska metoderna väl lämpade fördelningarna men att modifiera dessa så att de bättre stämmer överens med verkligheten.

Trunkering eller stympning av fördelningarna kan göras på olika sätt. Ett sätt är att kapa frekvensfunktionen med vertikala snitt i princip enligt FIG 6-2 där den streckade linjen betecknar den ursprungliga fördelningen och den heldragna den nya. Frekvensfunktionernas värden skiljer sig åt med en faktor som bestäms av att ytorna under bägge funktionerna ska vara lika med ett.

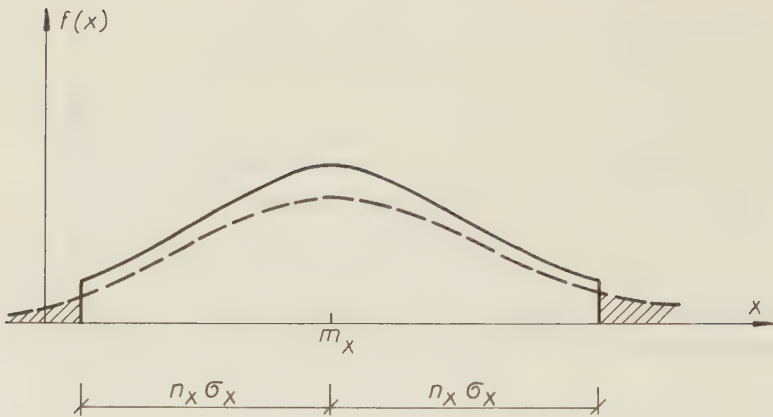


FIG 6-2. Trunkeringsmetod 1

Ett annat trunkeringssätt är att skära av frekvensfunktionen med en linje som går mellan punkter på frekvensfunktionen i trunkeringssnitten. Ett sådant förfaringssätt visas i FIG 6-3.

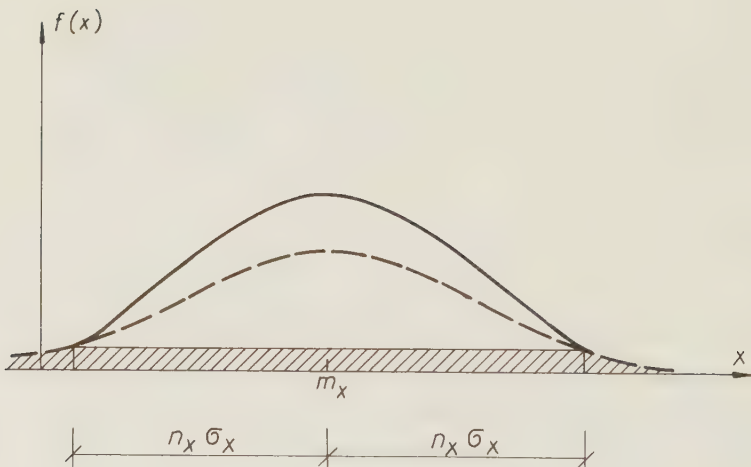


FIG 6-3. Trunkeringsmetod 2

Andra trunkeringssätt finnes naturligtvis men dessa beröres inte här. Då trunkerade fördelningar används vid skaderiskberäkningar förutsätts att standardavvikelse och medelvärde inte ändras genom trunkering dvs de parametrar som styr den otrunkerade fördelningen styr även den trunkerade.

I allmänhet ligger rimliga trunkeringsgränser för bärförmåga och laster relativt långt från medelvärdet. I standardavvikelser räknat cirka tre till fem. För normalfördelningen svarar tre standardavvikelser mot en fraktil på $1.35 \cdot 10^{-3}$ medan fem standardavvikelser motsvarar fraktilen $2.87 \cdot 10^{-7}$. Den förstoring av frekvensfunktionen som i FIG 6-2 visas starkt överdriven, representeras således av faktorn $1.0027 |1 / (1 - 2.7 \cdot 10^{-3})|$ vid trunkeringsgränsen tre standardavvikelser. Överhöjningen av frekvensfunktionen blir således alltid mycket blygsam.

6.3 Inverkan av trunkering på beräknad skaderisk

I dimensioneringssammanhang förekommande statistiska fördelningar har en form där huvuddelen av massan är koncentrerad kring medelvärdet, vilket medför att frekvensfunktionerna är avtagande funktioner från medelvärdet räknat. Fördelningar tillhörande exponentialfamiljen har starkt avtagande funktioner och redan på ett avstånd av några få standardavvikelser från medelvärdet är sannolikheten mycket liten att erhålla ett utfall i den regionen. Det kan till en början tyckas betydelselöst huruvida den betraktade egenskapen representeras av en ostympad fördelning eller ej.

Sannolikheten att ett aktuellt fraktilvärde underskrides är ju normalt liten och borde ej väsentligt påverka den beräknade skaderiskens storlek. Beräkningsexempel visar dock att inverkan av trunkering är större än väntat. Det negativa bidrag som uppkommer vid trunkering kan illustreras genom att spalta upp skaderiskvillkoret i olika delar enligt nedan

$$\begin{aligned}
 P_f &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_y^{\infty} f_S(x) f_R(y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_S(y)] f_R(y) dy = \\
 &= \int_{-\infty}^{R_1} [1 - F_S(y)] f_R(y) dy + \int_{R_1}^{\infty} [1 - F_S(y)] f_R(y) dy
 \end{aligned}
 \tag{6-8}$$

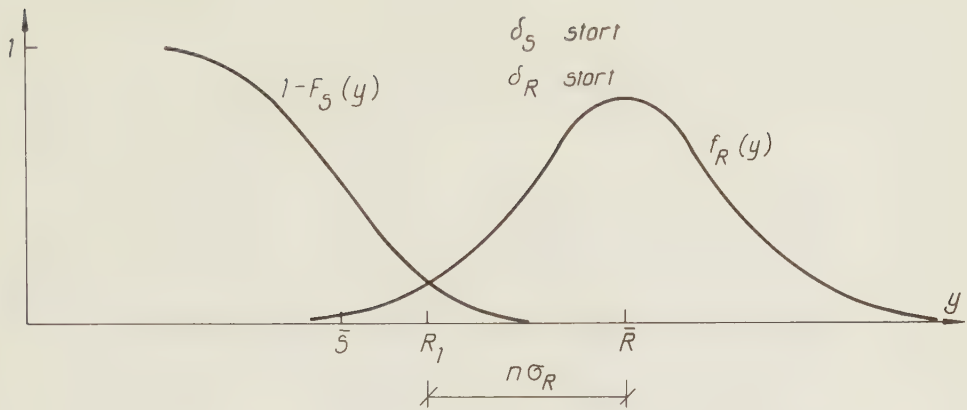
Förutsatt att lasten är otrunkerad och att bärförmågan är trun-
kerad vid punkten R_1 erhålls således bidragets storlek till

$$\int_{-\infty}^{R_1} [1 - F_S(y)] f_R(y) dy
 \tag{6-9}$$

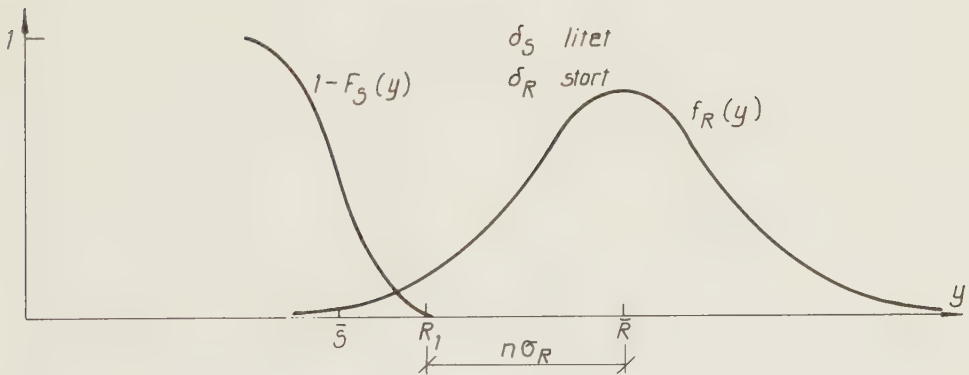
I FIG 6-4 illustreras några olika fall av trunkering. Storleken av de ingående variablernas statistiska parametervärden samt trunkeringspunktens läge $R_1 (= n \cdot \sigma_R)$ påverkar betydelsen av trunkeringen vid skaderiskberäkning. Således erhålles för stora värden på δ_R och δ_S stor inverkan på skaderiskens storlek i de fall n är litet, i annat fall är inverkan liten. Minskas δ_S ökar inverkan av trunkering för alla praktiskt möjliga värden på n . För den omvända situationen, dvs stort värde på δ_S och litet värde på δ_R , blir inverkan måttlig medan den blir liten för det fall att både δ_S och δ_R är små.

I det fall att både last och bärförmåga är trunkerad erhålles ett värde på kvoten $\bar{R}/\bar{S} (= \theta)$ då trunkeringspunkterna sammanfaller. Skaderisken blir i det trunkerade fallet då lika med noll. För att beskriva förändringen hos den beräknade skade-

a,



b,



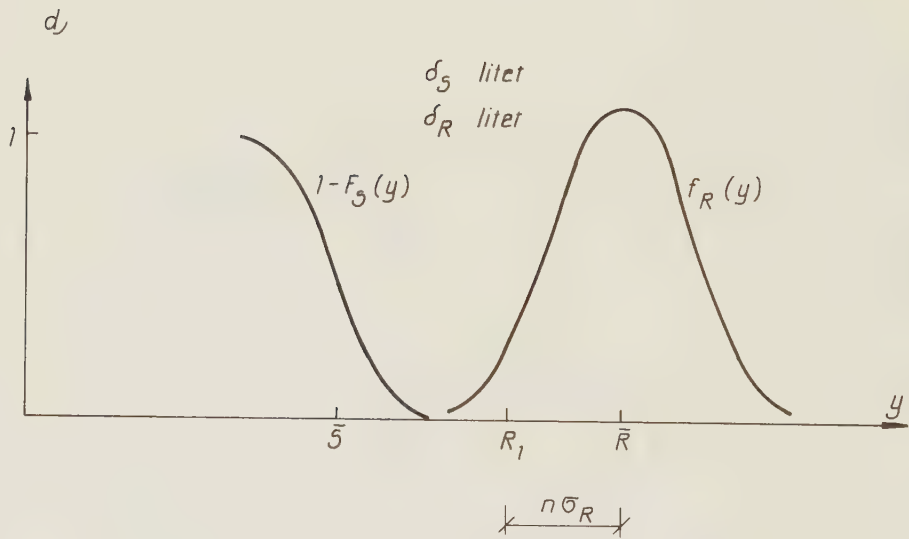
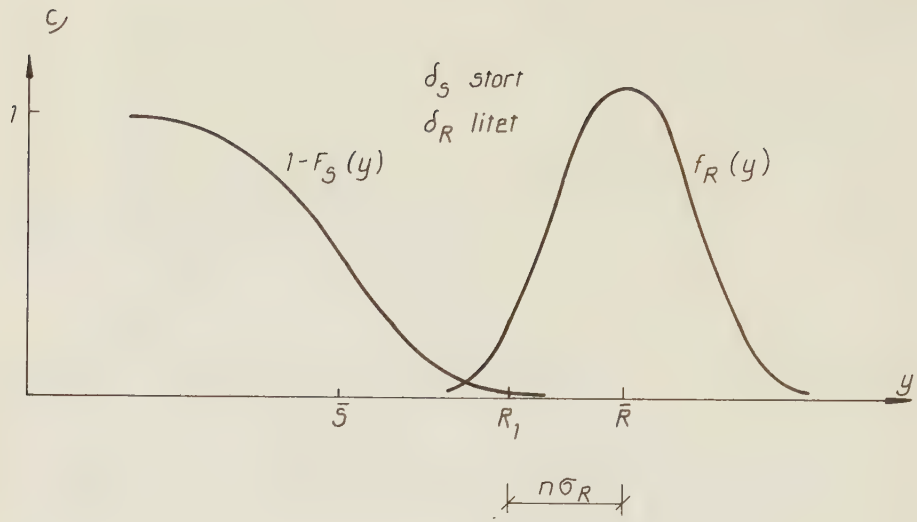


FIG 6-4. Exempel på trunkeringsfall.

risken införs en definition av säkerhetsindex β som

$$\beta = -\phi^{-1}(\varepsilon) \quad (6-10)$$

där ϕ^{-1} är inversen till normalfördelningens fördelningsfunktion

ε är beräknad skaderisk

I det otrunkerade fallet sammanfaller definitionen med Cornell's definition av säkerhetsindex, varför trunkeringens inverkan kan avläsas direkt genom den införda definitionen. I normer ges värden på säkerhetsindex för olika gränstillstånd. För de fall att kännedom om trunkeringsvärden föreligger kan dimensioneringsvärden korrigeras så att normens krav tillgodoses. En sådan korrigering kan ske med hjälp av ett diagram i princip enligt FIG 6-5 där förändringen i säkerhetsindex kan avläsas vid olika

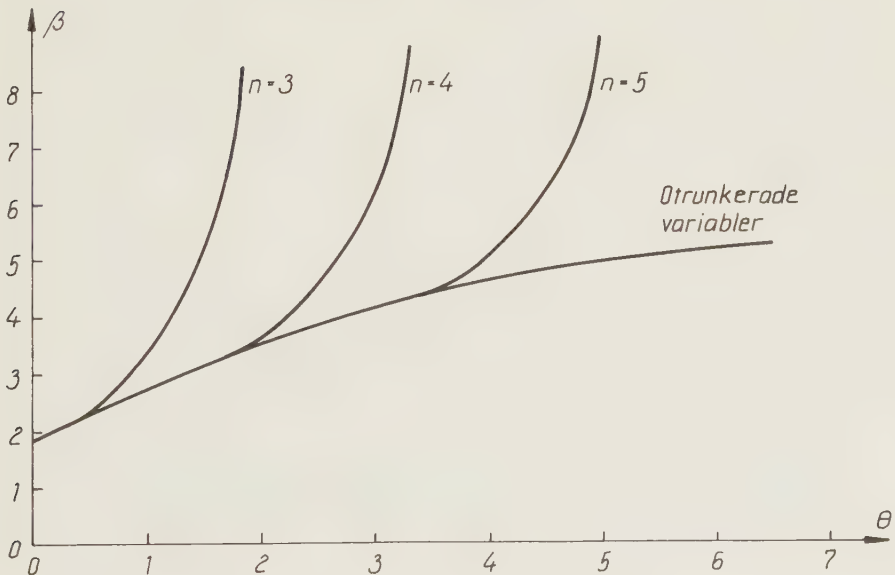


FIG 6-5. Inverkan på säkerhetsindex vid trunkerade variabler.

trunkeringspunkter hos last och bärförmåga ($n \cdot \sigma_S$ resp $n \cdot \sigma_R$). Dimensioneringsvärden $\bar{R} = \theta \cdot \bar{S}$ påverkas i detta fall radikalt av trunkeringen. Som jämförelse mellan säkerhetsindex och skaderisk anges nedan några värden på β och motsvarande skaderisk beräknade ur definitionen EKV 6-10.

TAB 6-3. Talvärden på säkerhetsindex och motsvarande skaderisk.

Säkerhetsindex	Skaderisk
1.0	0.16
1.5	0.067
2.0	0.023
2.5	$6.2 \cdot 10^{-3}$
3.0	$1.4 \cdot 10^{-3}$
3.5	$2.3 \cdot 10^{-4}$
4.0	$3.2 \cdot 10^{-5}$
4.5	$3.4 \cdot 10^{-6}$
5.0	$2.9 \cdot 10^{-7}$
6.0	$1 \cdot 10^{-9}$
8.0	$6.2 \cdot 10^{-6}$

I det följande redovisas några beräkningsexempel avsedda att belysa inverkan av trunkering på beräknad skaderisk. Vid beräkningarna har antagits att last S och bärförmåga R bägge är normalfördelade och att frekvensfunktionerna för S och R bägge är symmetriskt trunkerade på det sätt som visas i FIG 6-6. I beräkningarna har endast det fall behandlats då n har samma värde för S och R . För n har valts värdena 3, 4, 5 och ∞ (otrunkerad).

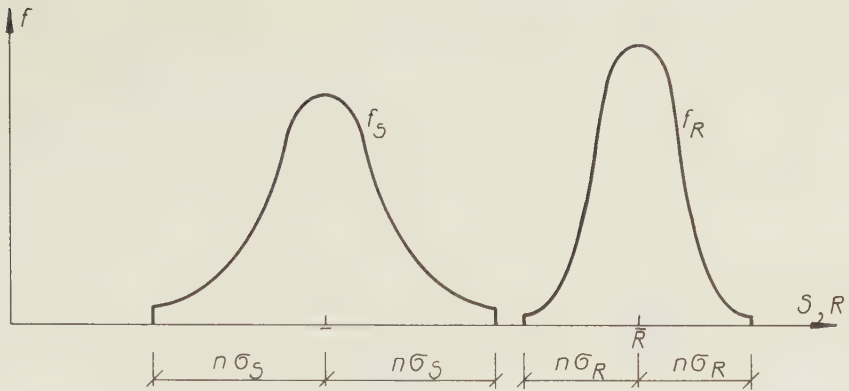


FIG 6-6. Trunkeringssätt för last och bärförmåga.

Skaderisken ε har beräknats ur uttrycket

$$\varepsilon = P(R - S < 0) = \int_{\bar{R} - n\sigma_R}^T f_R(y) \int_y^{\bar{S} + n\sigma_S} f_S(x) dx dy \quad (6-11)$$

där

$$T = \min(\bar{S} + n\sigma_S, \bar{R} + n\sigma_R)$$

Efter integrering av lastfunktionen och insättning av de för normalfördelning allmänt vedertagna beteckningarna erhålles

$$\varepsilon = \int_{\bar{R} - n\sigma_R}^T f_R(y) \left[\Phi(n) - \Phi\left(\frac{y - \bar{S}}{\sigma_S}\right) \right] dy \quad (6-12)$$

Efter införande av transformationen

$$u = \frac{y - \bar{R}}{\bar{G}_R}$$

kan skaderisken uttryckas helt i dimensionslösa parametrar dvs.

$$\mathcal{E} = \int_{-n}^V \varphi(u) \left[\phi(n) - \phi\left(\frac{\theta(1+u\mathcal{J}_R)-1}{\mathcal{J}_S}\right) \right] du \quad (6-13)$$

där

$$V = \min\left(\frac{1+n\mathcal{J}_S-\theta}{\theta\mathcal{J}_R}, n\right)$$

Lasten S har antagits utgöras av egentynngd G och nyttolast P så att

$$S = G + P \quad (6-14)$$

Med

$$\alpha = \bar{P} / \bar{G}$$

erhålles

$$\bar{S} = \bar{G} + \bar{P} = \bar{G}(1 + \alpha) \quad (6-15)$$

Lasterna G och P antages vara oberoende. Variansen för S erhålles då enligt

$$V(S) = V(G) + V(P) = \bar{G}^2 (\mathcal{J}_G^2 + \alpha^2 \mathcal{J}_P^2) \quad (6-16)$$

Efter division med $\bar{S}$ beräknas variationskoefficienten för S till

$$\delta_S = \frac{\sqrt{\delta_G^2 + \alpha^2 \delta_P^2}}{1 + \alpha} \quad (6-17)$$

Vid beräkningarna har följande värden valts.

$$\alpha = 0.2 - 1 \quad \text{i steg om } 0.2$$

$$\alpha = 1 - 6 \quad \text{i steg om } 1$$

$$\delta_G = 0.05$$

$$\delta_P = 0.2 - 0.4 \quad \text{i steg om } 0.1$$

$$\delta_R = 0.05 - 0.2 \quad \text{i steg om } 0.05$$

$$n = 3, 4, 5 \quad \text{i steg om } 1$$

G och P har antagits normalfördelade varför också S blir normalfördelad om G och P är otrunkerade. Det naturliga fallet är att G och P trunkeas innan sammanslagning sker. Detta fall blir dock svårbehandlat och därför göres först summering av G + P och därefter trunkeas S. Fördelningen för S blir inte densamma i de bägge fallen utom för det fall att δ_G eller δ_P är lika med noll. För det fall att G och P först trunkerats på lika stort antal standardavvikelser från medelvärdet och därefter adderats blir det maximala lastvärdet beroende av värdet på $(\delta_G + \alpha \delta_P)$. Göres först addering och därefter trunkering blir maximala lastvärdet istället avhängigt av värdet på $\sqrt{\delta_G^2 + \alpha^2 \delta_P^2}$, dvs maximala lastvärdet blir mindre än i det föregående fallet. Det valda värdet på δ_G är tämligen litet i förhållande till värdet på δ_P och avvikelserna från det mer naturliga fallet att G och P först trunkeas och därefter adderas blir inte stor. I samtliga fall har parametrarna δ och n hänförs till den otrunkerade fördelningen.

För varje kombination av α , δ_P och δ_R har för olika n -värden ett samband mellan β och θ beräknats och uppritats. För de fall att fördelningarna väl överlappar varandra har beräkningspunkter valts för $\theta = 1.5, 2, 2.5$ etc.

För att nedbringa beräkningstid i dator har en polynomapproximation använts i stället för att numeriskt integrera värden på ϕ . Approximation som hämtats från Abramovitz: Handbook of mathematical functions har nedanstående utseende

$$\phi(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} (a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3) \quad (6-18)$$

$$0 \leq x < \infty$$

där

$$t = \frac{1}{1 + a_4 x}$$

Med

$$a_1 = 0.4361836$$

$$a_2 = -0.1201676$$

$$a_3 = 0.9372980$$

$$a_4 = 0.33267$$

blir det absoluta felet i approximationen mindre än 10^{-5} .

Vid bestämning av β har även en polynomapproximation använts för att beskriva inversen till normalfördelningens fördelningsfunktion. Uttrycket är

$$\beta = s - \frac{a_1 + a_2 s}{1 + a_3 s + a_4 s^2} \quad (6-19)$$

där

$$s = \sqrt{\ln \frac{1}{\varepsilon^2}}$$

$$0 < \varepsilon \leq 0.5$$

Med

$$a_1 = 2.30753$$

$$a_2 = 0.27061$$

$$a_3 = 0.99229$$

$$a_4 = 0.04481$$

blir det absoluta felet i $\beta < 3 \cdot 10^{-3}$.

I valda beräkningpunkter, givna av värdet på θ , har skaderisken ϵ beräknats genom numerisk integration. Härvid har Simpson's metod i en dimension använts. Integrationsområdet har succesivt delats tills en relativ noggrannhet av 0.05 uppnåtts vid bestämning av ϵ .

För de värden på θ då fördelningarnas överlapp minskar krävs ett ökat antal beräkningpunkter eftersom β varierar kraftigt med θ i detta område.

En analytisk approximation av skaderisken har för detta ändamål härletts och finns närmare beskriven i BIL. A. Approximationen är giltig i de fall integrationsområdet inte faller inom en standardavvikelses avstånd från vare sig $\bar{S}$ eller $\bar{R}$. FIG 6-7 illustrerar de villkor som ska gälla.

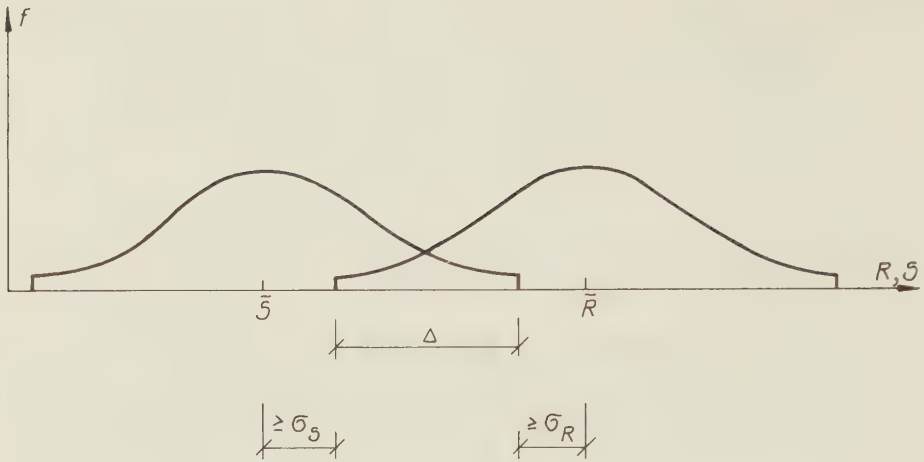


FIG 6-7. Giltighetsvillkor för skaderiskapproximation.

Ur figuren framgår att

$$\theta \geq \max \left(\frac{1 + n\delta_S}{1 - n\delta_R}, \frac{1 + n\delta_S}{1 - \delta_R} \right) \quad (6-20)$$

samt att

$$\theta_{\max} = \frac{1 + n\delta_S}{1 - n\delta_R} \quad (6-21)$$

Det analytiska uttrycket för skaderisken är

$$\varepsilon = \frac{f_0^2}{\alpha_1^2} \frac{1}{\sigma_S - \sigma_R} \left[\sigma_R \left(e^{\alpha_1 \frac{\Delta}{\sigma_R}} - 1 \right) - \sigma_S \left(e^{\alpha_1 \frac{\Delta}{\sigma_S}} - 1 \right) \right] \quad (6-22)$$

där

f_0 är frekvensfunktionens värde i trunkeringspunkten

α_1 är en konstant

Δ är överlappslängden

I det tillåtna området där ekv (6-22) är giltig har 100 beräkningsvärden för ϵ och motsvarande β -värden beräknade ur ekv. (6-19) garanterat att en jämn kurva erhållits. Värden på säkerhetsindex β är relativt okänsliga för variationer i ϵ . Vid sammanställning av de på dator plottade kurvgrenarna har värdet på β erhållet från en integrationspunkt, återfunnits på den kurvgren som erhållits med approximationen enligt ekv. (6-22). Därmed har fastställts att noggrannheten hos approximationen är tillräcklig för det syfte som avsetts. Resultaten från beräkningarna återfinns i BIL F.

6.4 Fördelningar för funktioner av trunkerade fördelningar

Endast i sällsynt enkla fall framstår stokastiska variabler i enkel form i beräkningsuttryck. Exempel på ett sådant fall är en armeringsstång utsatt för dragning. I övrigt är det vanligen så att egenskaperna hos material och beteendet hos belastad konstruktion medför att variablerna förekommer i funktionsform i beräkningsmodellerna. Exempel på sådana funktioner kan vara summa av stokastiska variabler, produkt, rotfunktion eller potensfunktion etc. Är det enbart intressant att veta statistiska parametervärden som medelvärde och varians, bjuder inte någon funktion några praktiska svårigheter. Annorlunda förhåller det sig då man vill veta fördelningen för funktioner av stokastiska variabler. Ett teoretiskt verktyg för bestämning av fördelningar är karakteristiska funktioner definierade genom uttrycket

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) \quad (6-23)$$

där

$F(x)$ är fördelningsfunktionen

Med hjälp av karakteristiska funktioner kan man bl.a. visa att om två oberoende stokastiska variabler X och Y har karakteristiska funktioner $\varphi_1(t)$ resp. $\varphi_2(t)$ så är karakteristiska funktionen för summan av variablerna $\varphi_1(t) \cdot \varphi_2(t)$. Ur den karakteristiska funktionen kan den nya frekvensfunktionen erhållas genom inverssformeln

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t) dt \quad (6-24)$$

Så länge man begränsar sig till otrunkerade fördelningar, ett fåtal specialfall samt enkla funktioner av fördelningar är den karakteristiska funktionen ett användbart verktyg. T.ex. visar man lätt på detta sätt att en summa av två gammafördelade och oberoende variabler bildar en ny gammafördelad variabel. Samma sak gäller även för normalfördelning. För fall med allmänt förekommande fördelningstyper och funktioner av stokastiska variabler ger metoden svåröverstigliga hinder vid den matematiska hanteringen. Istället rekommenderas en metod att medels numerisk integration över frekvensfunktioner finna fördelningen för funktioner av trunkerade variabler.

6.4.1 Fördelningen för en produkt av trunkerade normalfördelade variabler

Produkt av stokastiska variabler är vanligt förekommande i mekaniska beräkningsformler varvid statistiska data oftast föreligger för de enskilda variablerna och mer sällan för olika kombinationer av dem. En inventering av beräkningsformler visar att uppdelningar i undergrupper av produkter av material- och dimensionsparametrar ofta låter sig göras. Exempelvis kan beräkningsuttrycket för en underarmerad betongbalk, där brottmomentet M_B med vedertagna

beteckningar kan skrivas

$$M_B = f_{st} \cdot A_5 \cdot d \left(1 - \frac{f_{st} A_5}{2 b d f_{cc}} \right) \quad (6-25)$$

Betecknas materialparametrar (hållfasthet) med M_i och dimensionsparametrar (yta, längd) med L_i kan uttrycket för M_B skrivas med nya symboler som

$$M_B = M_1 \cdot L_1 \cdot L_2 \left(1 - \frac{M_1 L_1}{2 L_2 L_2 M_2} \right) \quad (6-26)$$

där uppdelning i grupper med produkter framgår.

Representeras de olika variablerna av normalfördelningar med resp. parametrar uppstår oegentligheter till följd av att normalfördelningen är obegränsad. Det föreligger således en sannolikhet större än noll att produkten, eller om man så vill, bärförmågan ska anta negativa värden. Dessutom föreligger likaledes en sannolikhet större än noll att negativ hållfasthet och negativ dimension ska ge positiv bärförmåga. Normalfördelning är dock en förhållandevis enkel fördelning att behandla vid statistisk hållfasthetsdimensionering och ofta även ett krav för att den statistiska verifikationsmetoden ska fungera. Det vore därför värdefullt att veta inverkan av det fel man begår när fördelningarna räknas som obegränsade trots verklighetsmotsättningen. I avsikt att erhålla en uppfattning om felets storleksordning har en beräkning genomförts för en produkt av två normalfördelade variabler.

Bärförmågan R har antagits vara sammansatt av en materialberoende variabel M och en dimensionsberoende variabel L på så sätt att

$$R = M \cdot L \quad (6-27)$$

där $M \in N(\bar{M}, \sigma_M)$

$L \in N(\bar{L}, \sigma_L)$

M och L är oberoende

Fördelningsfunktionen $F_R(r)$ kan tecknas som

$$F_R(r) = P(R \leq r) = P(M \cdot L \leq r) =$$

$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty}^0 \int_{r/M}^{\infty} \frac{1}{2\pi \sigma_M \sigma_L} e^{-\frac{(M-\bar{M})^2}{2\sigma_M^2}} e^{-\frac{(L-\bar{L})^2}{2\sigma_L^2}} dL dM + \\ & + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{r/L} \frac{1}{2\pi \sigma_M \sigma_L} e^{-\frac{(M-\bar{M})^2}{2\sigma_M^2}} e^{-\frac{(L-\bar{L})^2}{2\sigma_L^2}} dL dM \end{aligned}$$

(6-28)

Grafiskt illustreras $F_R(r)$ av den volym som inryms under den streckade ytan i FIG 6-8.

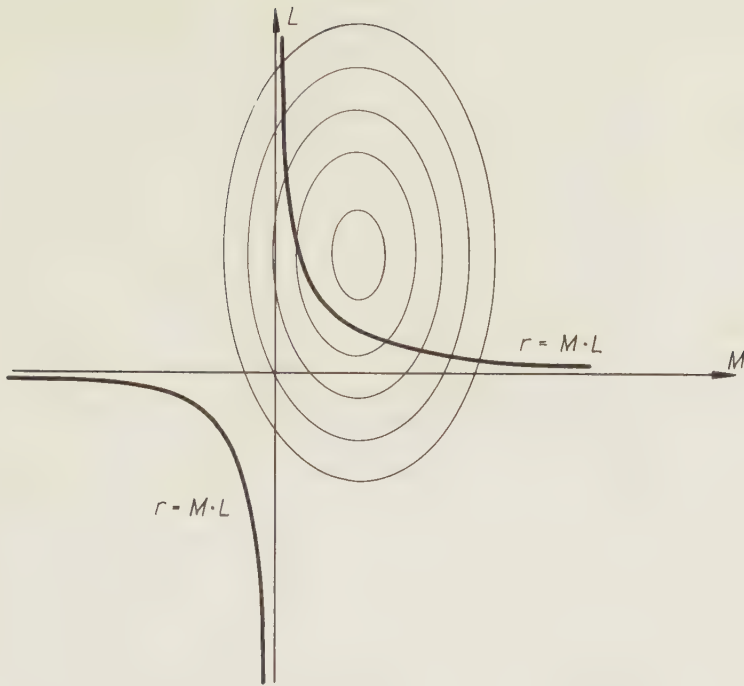


FIG 6-8. Fördelningsfunktion för en produkt av två otrunkerade variabler.

I fallet trunkerade fördelningar korrigeras ekv. 6-28 med nya integrationsgränser samt med en faktor som skalar upp den tvådimensionella frekvensfunktionen så att totala volymen under funktionen blir lika med ett. Motsvarande illustration av fördelningsfunktionen visas i FIG 6-9.

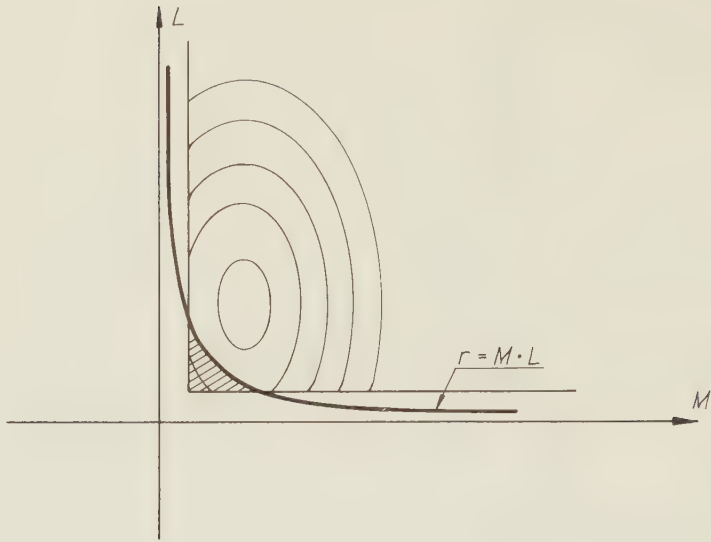


FIG 6-9. Fördelningsfunktion för en produkt av två trunkerande variabler.

För att förenkla beräkningen göres först ett par variabelsubstitutioner. Låt

$$x = \frac{M - \bar{M}}{\sigma_M}$$

$$y = \frac{L - \bar{L}}{\sigma_L}$$

(6-29)

Frekvensfunktionen uttryckt i de nya variablerna erhålles ur sambandet

$$f_{x,y}(x,y) = f_{M,L}(M,L) \frac{d(M,L)}{d(x,y)} \quad (6-30)$$

Eftersom

$$\frac{d(M,L)}{d(x,y)} = \begin{vmatrix} \sigma_M & 0 \\ 0 & \sigma_L \end{vmatrix} = \sigma_M \sigma_L \quad (6-31)$$

fås

$$f_{x,y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{y^2}{2}} \quad (6-32)$$

Låt nu

$$\begin{aligned} x &= u \cos 45 - v \sin 45 \\ y &= u \sin 45 + v \cos 45 \end{aligned} \quad (6-33)$$

På samma sätt erhålles nu

$$f_{u,v}(u,v) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{v^2}{2}} \quad (6-34)$$

eftersom

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = 1 \quad (6-35)$$

Gränskurvan $r = M \cdot L$ uttrycks i de nya variablerna som

$$\frac{r}{M \cdot L} = x y \delta_M \delta_L + x \delta_M + y \delta_L + 1 \quad (6-36)$$

resp

$$\frac{r}{\bar{M}\bar{L}} = \frac{(u^2 - v^2) \delta_M \delta_L}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} (u-v) \delta_M + \frac{1}{\sqrt{2}} (u+v) \delta_L + 1 \quad (6-37)$$

Sättes $\delta_M = \delta_L = \delta$ erhålles

$$\frac{r}{\bar{M}\bar{L}} = \frac{\delta^2}{2} (u^2 - v^2) + \delta \sqrt{2} u + 1 \quad (6-38)$$

I det otrunkerade fallet erhålles fördelningsfunktionen för

 $T = R / \bar{M} / \bar{L}$ till

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P\left(\frac{r}{\bar{M} \cdot \bar{L}} \leq t\right) = \quad (6-39)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{v^2}{2}} du dv$$

där

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{\delta} - \sqrt{\frac{2t}{\delta^2} + v^2} \\ u_2 &= -\frac{\sqrt{2}}{\delta} + \sqrt{\frac{2t}{\delta^2} + v^2} \end{aligned} \quad (6-40)$$

Integralen (6-39) kan reduceras till en enkelintegral

$$F_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} [\phi(u_2) - \phi(u_1)] dv \quad (6-41)$$

där u_2 och u_1 ges av ekv (6-40).Grafiskt representeras $F_T(t)$ av volymen i det skuggade området i FIG 6-10.

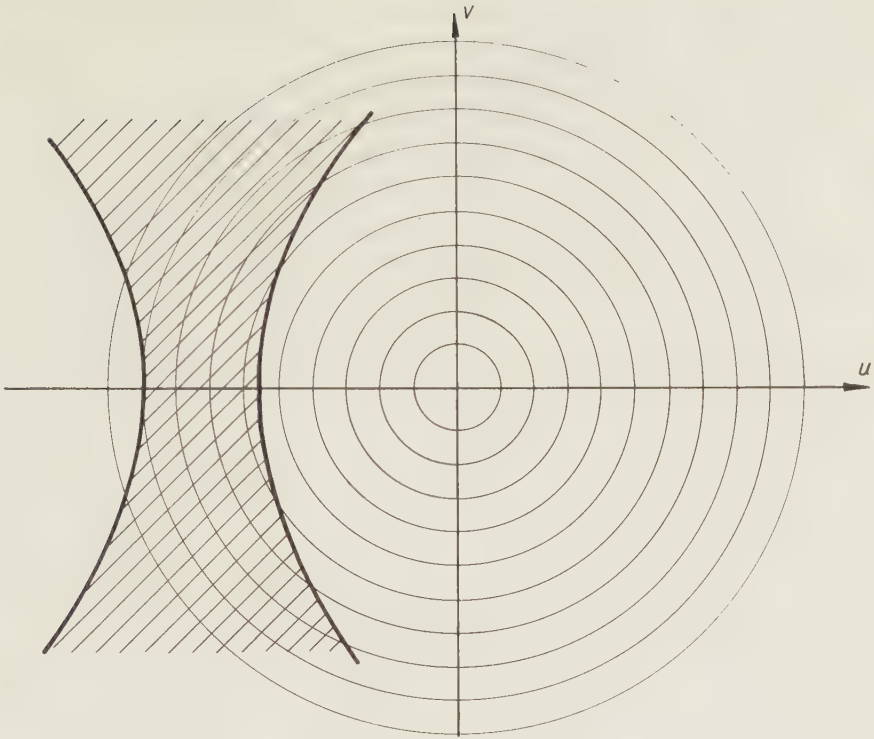


FIG 6-10. Fördelningsfunktion $F_T(t)$ i ett transformerat system.

I det trunkerade fallet antages endast den undre gränsen vara trunkerad och behandlingen inskränks till det fall att bägge variablerna är trunkerade på samma avstånd från medelvärde mätt i antalet standardavvikelser. Fördelningsfunktionen för $T = R / \bar{M} / \bar{L}$ blir i detta fall

$$F_T(t) \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{2\pi \phi(n) \cdot \phi(n)} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{v^2}{2}} du dv \quad (6-42)$$

där

$$v_2 = \frac{\frac{2t}{\delta^2} + \frac{4n}{\delta} - 2n^2 - \frac{2}{\delta^2}}{2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\delta} - n \right)} \quad \delta < \frac{1}{n}$$

$$v_1 = -v_2$$

$$u_2 = -\frac{\sqrt{2}}{\delta} + \sqrt{\frac{2t}{\delta^2} + v^2} \quad (6-43)$$

$$u_1 = v - n \cdot \sqrt{2}$$

$F_T(t)$ motsvaras av volymen i det skuggade området i FIG 6-11.

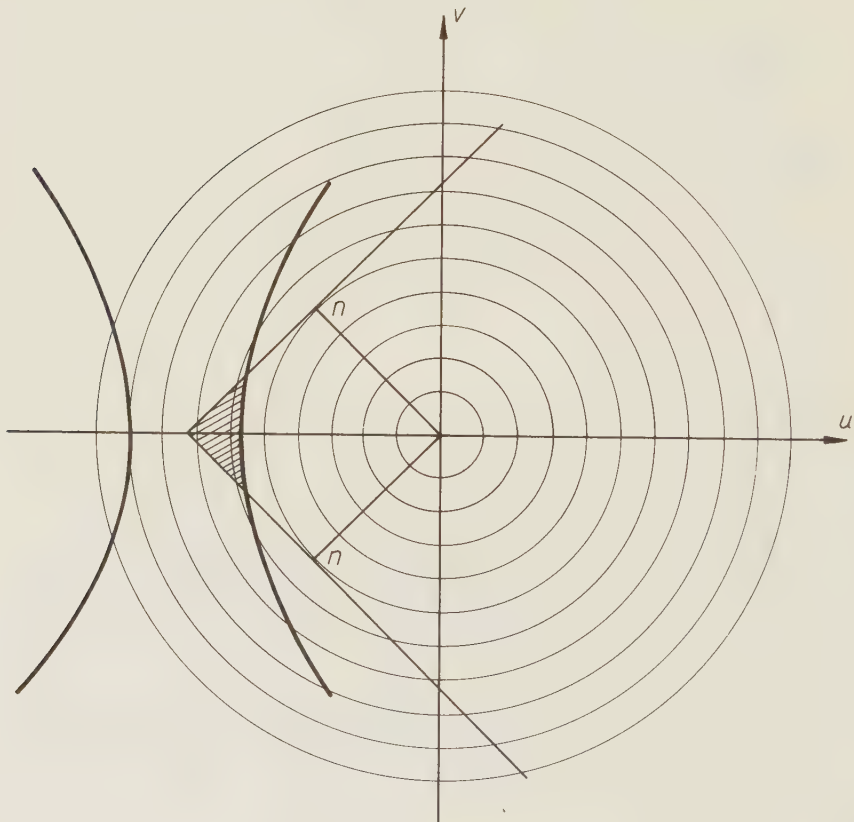


FIG 6-11. Fördelningsfunktion $F_T(t)$ för trunkerade variabler.

Ekvationerna 6-41 och 6-42 har beräknats med hjälp av Simpson's metod i en dimension. Relativa noggrannheten vid bestämning av $F_T(t)$ har satts till 0.01. Normalfördelningens fördelningsfunktion har approximerats med en polynomapproximation på samma sätt som i avsnitt 6.3. Då symmetri råder i bägge fallen har endast halva integrationsområdet utnyttjats. I det otrunkerade fallet har den övre gränsen satts till 10 och likaså i det trunkerade fallet då $n = 5$ eftersom i detta fall den teoretiska gränsen är oändligt stor. Volymen som befinner sig utanför gränsen 10 är $7.6 \cdot 10^{-24}$ vilket är försumbart litet. Resultaten av beräkningarna redovisas nedan i tabellform för fallet $\delta = 0.2$.

TAB 6-2. Fördelningsfunktion för en produkt av två otrunkerade variabler. ($\delta = 0.2$)

$t = r / \bar{M} / \bar{L}$	$F_T(t)$
0.1	$9.5 \cdot 10^{-6}$
0.2	$1.5 \cdot 10^{-4}$
0.3	$1.3 \cdot 10^{-3}$
0.4	$7.0 \cdot 10^{-3}$
0.5	$2.5 \cdot 10^{-2}$
0.6	$6.8 \cdot 10^{-2}$
0.7	0.14
0.8	0.25
0.9	0.39
1.0	0.53
1.1	0.66
1.2	0.77
1.3	0.85
1.4	0.91

$t = r / \bar{M} / \bar{L}$	$F_T(t)$
1.5	0.95
1.6	0.97
1.7	0.99
1.8	0.99
1.9	1.0
2.0	1.0

TAB 6-3. Fördelningsfunktion för en produkt av två trunkerade variabler. ($\delta = 0.2$)

$t = r / \bar{M} / \bar{L}$	$F_T(t)$		
	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
0.1	0	$4.8 \cdot 10^{-7}$	$9.0 \cdot 10^{-6}$
0.2	$6.1 \cdot 10^{-6}$	$9.4 \cdot 10^{-5}$	$1.4 \cdot 10^{-4}$
0.3	$4.8 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$
0.4	$5.0 \cdot 10^{-3}$	$7.0 \cdot 10^{-3}$	$7.0 \cdot 10^{-3}$
0.5	$2.3 \cdot 10^{-2}$	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$2.5 \cdot 10^{-2}$
0.6	$6.5 \cdot 10^{-2}$	$6.8 \cdot 10^{-2}$	$6.8 \cdot 10^{-2}$
0.7	0.14	0.14	0.14
0.8	0.25	0.25	0.25

Tabellerna ger en uppfattning om skillnaderna i fördelningsfunktionernas värden. Det är dock något vanskligt att erhålla skillnaden kvantitativt med bibehållen noggrannhet. I detta fall är det bättre att numeriskt beräkna skillnaden direkt enligt samma principer. En dylik beräkning redovisas i TAB 6-4 och den grafiska representationen illustreras i FIG 6-12.

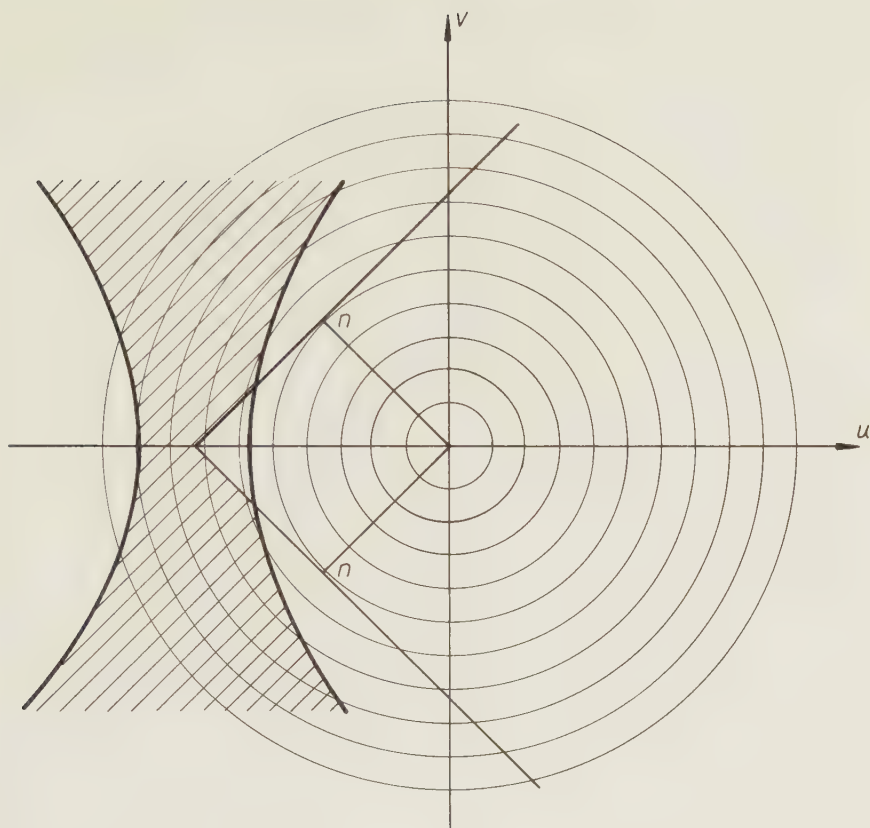


FIG 6-12. Skillnad i fördelningsfunktionens värde för otrunkerade resp trunkerade variabler.

TAB 6-4. Skillnad i fördelningsfunktionens värde för en produkt av otrunkerade resp. trunkerade variabler.
($\delta = 0.2$)

$t = r / \bar{M} / \bar{L}$	$\Delta F_T(t)$		
	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
0.1	$9.5 \cdot 10^{-6}$	$9.0 \cdot 10^{-6}$	$5.7 \cdot 10^{-7}$
0.2	$1.4 \cdot 10^{-4}$	$5.1 \cdot 10^{-5}$	- " -
0.3	$8.3 \cdot 10^{-4}$	$6.4 \cdot 10^{-5}$	- " -
0.4	$2.0 \cdot 10^{-3}$	$6.4 \cdot 10^{-5}$	- " -
0.5	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$6.4 \cdot 10^{-5}$	- " -
0.6	$2.7 \cdot 10^{-3}$	- " -	- " -
0.7	- " -	- " -	- " -
0.8	- " -	- " -	- " -
0.9	- " -	- " -	- " -
1.0	- " -	- " -	- " -

Att skillnaden är konstant för alla t då $n = 5$ och $\delta = 0.2$ framgår av FIG 6-13.

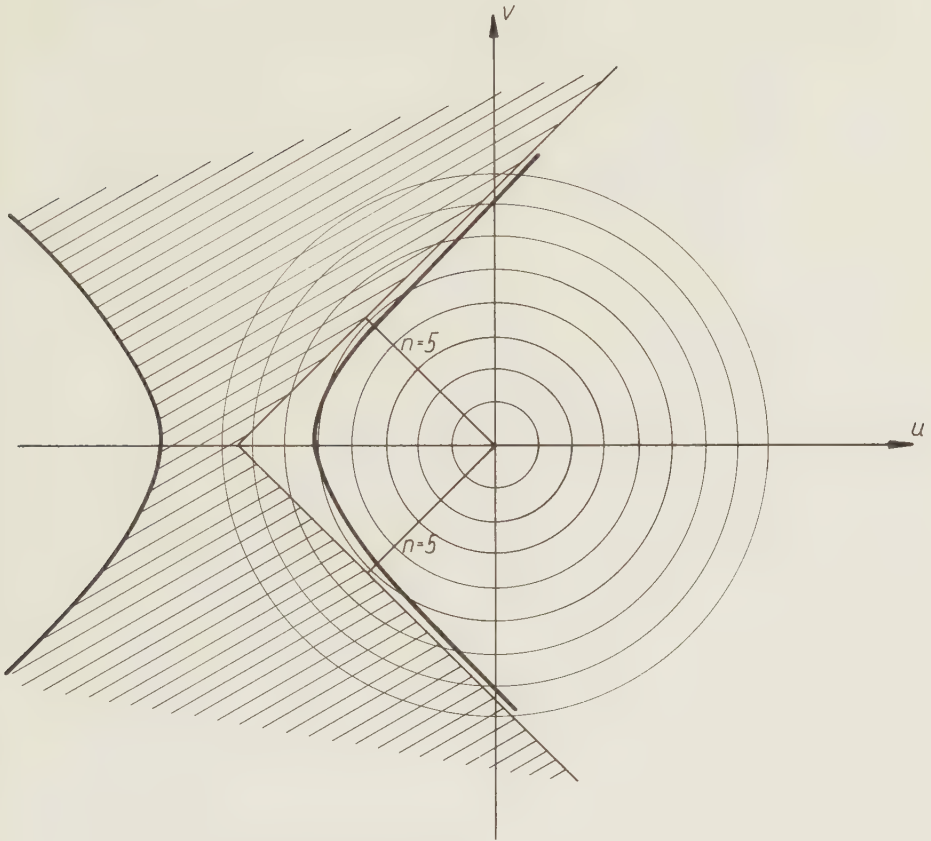


FIG 6-13. Skillnad i fördelningsfunktionens värde då $n = 5$ och $\delta = 0.2$.

Trunkeringsgränsens läge ligger då utanför den ena grenen av funktionen $r / \bar{M} / \bar{L}$ och den instängda volymen påverkas obetydligt av värdet på $t = r / \bar{M} / \bar{L}$. Då t ökar går skillnaden i funktionsvärden mot ett gränsvärde även för övriga trunkeringsgränser. Dessa gränsvärden kan beräknas med hjälp av FIG 6-14 och redovisas i TAB 6-5.

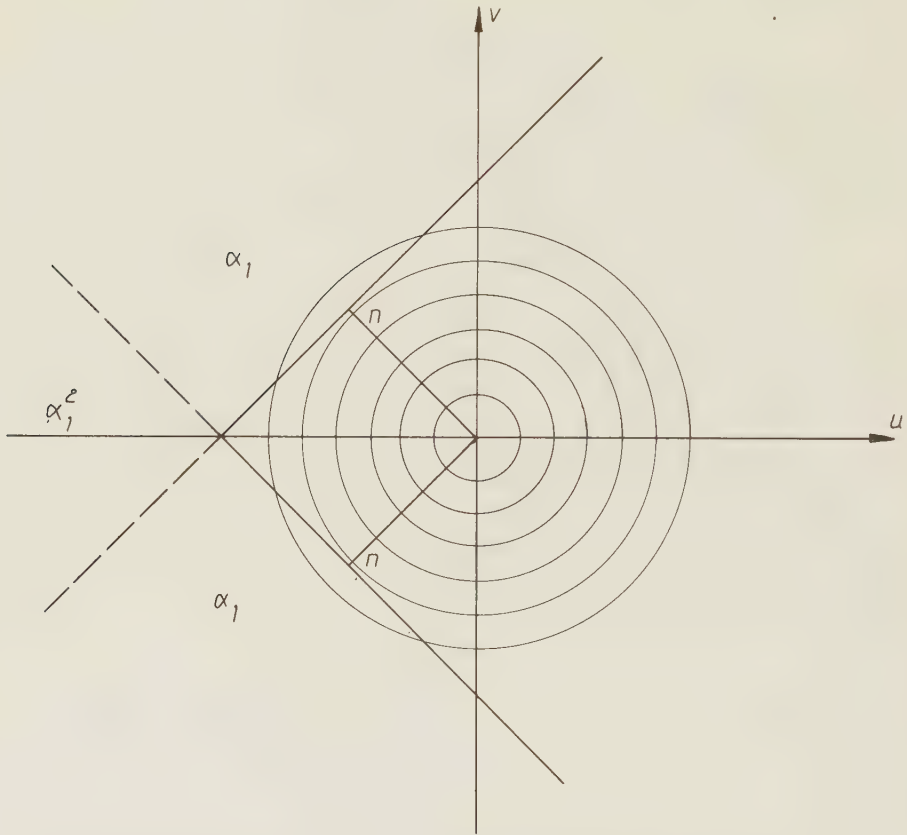


FIG 6-14. Illustration av hur gränsvärden för skillnaden i fördelningsfunktionens värde kan uppskattas.

Volymen V utanför trunkeringsgränserna blir

$$V = 2\alpha_1 - \alpha_1^2 \quad (6-44)$$

där fraktilen α_1 beror av n

TAB 6-5. Gränsvärden för skillnad i fördelningsfunktionens värde.

Trunkerings gräns	Fraktil	Gränsvärde
n	α_1	$2\alpha_1 - \alpha_1^2$
3	$1.35 \cdot 10^{-3}$	$2.70 \cdot 10^{-3}$
4	$3.17 \cdot 10^{-5}$	$6.34 \cdot 10^{-5}$
5	$2.87 \cdot 10^{-7}$	$5.74 \cdot 10^{-7}$

De beskrivna fallen hänför sig till en parameter $t = r / \bar{M} / \bar{L}$. Så länge det givna villkoret $\delta_M = \delta_L = \delta = 0.2$ är uppfyllt kan de beräknade värdena för fördelningsfunktionerna användas för alla positiva värden på $\bar{M}$ och $\bar{L}$ eftersom

$$\begin{aligned} F_T(t) &= P(R / \bar{M} / \bar{L} \leq t) = \\ &= P(R \leq t \cdot \bar{M} \cdot \bar{L}) = F_R(t \cdot \bar{M} \cdot \bar{L}) \end{aligned} \quad (6-45)$$

En angivelse av bärförmågens 5%-fraktil påverkas inte nämnvärt av att ingående variabler trunkerats. För så stora fraktilvärden ges skillnaden i fördelningsfunktionens värde av i TAB 6-5 angivna gränsvärden vilka är försumbara jämfört med nivån 0.05. Trunkerings betydelse framstår endast om bärförmågens fördelningsfunktion används vid skaderiskberäkningar.

6.4.2 Fördelningen för en summa av trunkerade normalfördelade variabler.

Addition av stokastiska variabler förekommer i såväl beräkningsuttryck för bärförmåga som i uttryck för totallaster t.ex. egen-tyngd + nyttolast. Det förefaller mest naturligt att varje variabel ska behandlas för sig vad beträffar statistiska parametrar och naturliga övre och undre gränser. Den matematiskt mest enkla metoden är däremot att först göra en summering och därefter sätta gränser. I avsikt att värdera skillnaderna vid de olika förfaringssätten har en beräkning utförts i princip lika den som beskrivits i 6.4.1. I detta fall gäller det summering av två oberoende normalfördelade variabler samt fördelningsfunktionen för summan av dem dels för fallet otrunkerade variabler dels för fallet trunkerade variabler.

Antag att variablerna M och L har medelvärde $\bar{M}$ och $\bar{L}$ samt standardavvikelse σ_M resp. σ_L . Summan av variablerna betecknas Z .

Fördelningsfunktionen för Z i det otrunkerade fallet blir en ny normalfördelning med medelvärde $\bar{M} + \bar{L}$ och standardavvikelsen $\sqrt{\sigma_M^2 + \sigma_L^2}$ och bestämningen av F_Z kan därför göras med hjälp av en normalfördelningstabell. I TAB 6-6 redovisas F_Z dels otrunkerad dels trunkerad vid 3, 4 och 5 standardavvikelser. Trunkering har skett efter summering. Redovisningen är inskränkt till det fall att $\bar{M} = \bar{L}$ och $\sigma_M = \sigma_L = 0.2$. Då erhålles

$$F_Z(Z) = P(M+L \leq Z) = \Phi \left(\frac{Z - \bar{M} - \bar{L}}{\sqrt{\sigma_M^2 + \sigma_L^2}} \right) = \quad (6-46)$$

$$= \Phi \left(\frac{Z/\bar{M} - 2}{\sqrt{2} \sigma_M} \right) = \Phi \left(\frac{Z/\bar{M} - 2}{\sqrt{2} \cdot 0.2} \right)$$

TAB 6-6. Fördelningsfunktion för en summa av två otrunkerade variabler. ($\delta = 0.2$)

$t = z / \bar{M}$	$F_Z(t)$			
	otrunkerad	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
0.1	$9.3 \cdot 10^{-12}$	0	0	0
0.2	$1.0 \cdot 10^{-10}$	0	0	0
0.3	$9.0 \cdot 10^{-10}$	0	0	0
0.4	$7.7 \cdot 10^{-9}$	0	0	0
0.5	$5.7 \cdot 10^{-8}$	0	0	0
0.6	$3.6 \cdot 10^{-7}$	0	0	$1.2 \cdot 10^{-7}$
0.7	$2.2 \cdot 10^{-6}$	0	0	$1.9 \cdot 10^{-6}$
0.8	$1.1 \cdot 10^{-5}$	0	0	$1.1 \cdot 10^{-5}$
0.9	$5.1 \cdot 10^{-5}$	0	$1.9 \cdot 10^{-5}$	$5.1 \cdot 10^{-5}$
1.0	$2.1 \cdot 10^{-4}$	0	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$
1.1	$7.4 \cdot 10^{-4}$	0	$7.0 \cdot 10^{-4}$	$7.4 \cdot 10^{-4}$
1.2	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$9.9 \cdot 10^{-4}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$
1.3	$6.7 \cdot 10^{-3}$	$5.3 \cdot 10^{-3}$	$6.6 \cdot 10^{-3}$	$6.7 \cdot 10^{-3}$
1.4	$1.7 \cdot 10^{-2}$	$1.6 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-2}$
1.5	$3.9 \cdot 10^{-2}$	$3.7 \cdot 10^{-2}$	$3.9 \cdot 10^{-2}$	$3.9 \cdot 10^{-2}$
1.6	$7.9 \cdot 10^{-2}$	$7.7 \cdot 10^{-2}$	$7.9 \cdot 10^{-2}$	$7.9 \cdot 10^{-2}$
1.7	0.14	0.14	0.14	0.14
1.8	0.24	0.24	0.24	0.24
1.9	0.36	0.36	0.36	0.36
2.0	0.50	0.50	0.50	0.50

I fallet först trunkering och därefter summering beräknas fördelningsfunktionen efter samma principer som i avsnitt 6.4.1. Efter införande av variabelsubstitutionerna

$$\begin{aligned} x &= \frac{M - \bar{M}}{\sigma_M} \\ y &= \frac{L - \bar{L}}{\sigma_L} \end{aligned} \quad (6-47)$$

och

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u - v) \\ y &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u + v) \end{aligned} \quad (6-48)$$

erhålles uttrycket för gränskurvan

$$Z = M + L \quad (6-49)$$

till

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_M (u - v) + \bar{M} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_L (u + v) + \bar{L} \quad (6-50)$$

Iakttages specialfallet $\bar{M} = \bar{L}$ och $\sigma_M = \sigma_L = \sigma$ erhålles

$$\frac{Z}{\bar{M}} = \sqrt{2} \sigma u + \sigma \quad (6-51)$$

Införes variabeln $T = Z / \bar{M}$ erhålles

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P\left(\frac{Z}{\bar{M}} \leq t\right) = \quad (6-52)$$

$$= \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{2\pi \phi(n) \cdot \phi(n)} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-\frac{v^2}{2}} du dv$$

där

$$v_2 = \frac{t + n \cdot 2 \cdot \delta - 2}{\sqrt{2} \cdot \delta}$$

$$v_1 = -v_2$$

(6-53)

$$u_2 = \frac{t - 2}{\sqrt{2} \cdot \delta}$$

$$u_1 = v - n \cdot \sqrt{2}$$

$F_T(t)$ motsvarar volymen under det skuggade området i FIG 6-15.

Vid den numeriska beräkningen som utförts i princip på samma sätt som i avsnitt 6.4.1 har resultat enligt TAB 6-7 erhållits

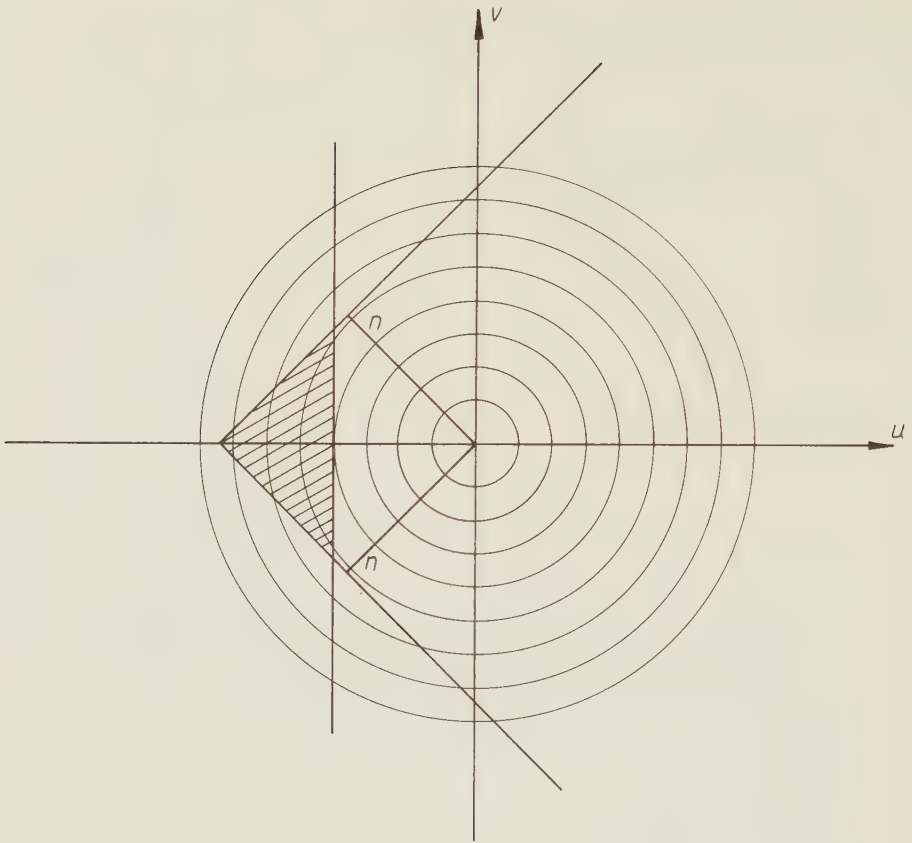


FIG 6-15. Fördelningsfunktion $F_T(t)$ för trunkerade variabler.

TAB 6-7. Fördelningsfunktion för en summa av två trunkerade variabler. ($\delta = 0.2$)

$t = z / \bar{M}$	$F_T(t)$		
	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
0.1	0	0	0
0.2	0	0	0
0.3	0	0	0
0.4	0	0	0
0.5	0	0	0
0.6	0	$1.4 \cdot 10^{-7}$	$3.4 \cdot 10^{-7}$
0.7	0	$1.3 \cdot 10^{-6}$	$2.1 \cdot 10^{-6}$
0.8	0	$8.5 \cdot 10^{-6}$	$1.1 \cdot 10^{-5}$
0.9	$6.8 \cdot 10^{-6}$	$4.4 \cdot 10^{-5}$	$5.1 \cdot 10^{-5}$
1.0	$7.3 \cdot 10^{-5}$	$1.9 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-4}$
1.1	$4.1 \cdot 10^{-4}$	$7.1 \cdot 10^{-4}$	$7.3 \cdot 10^{-4}$
1.2	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$
1.3	$5.6 \cdot 10^{-3}$	$6.6 \cdot 10^{-3}$	$6.7 \cdot 10^{-3}$
1.4	$1.5 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-2}$
1.5	$3.7 \cdot 10^{-2}$	$3.9 \cdot 10^{-2}$	$3.9 \cdot 10^{-2}$
1.6	$7.6 \cdot 10^{-2}$	$7.9 \cdot 10^{-2}$	$7.9 \cdot 10^{-2}$
1.7	0.14	0.14	0.14
1.8	0.24	0.24	0.24
1.9	0.36	0.36	0.36
2.0	0.50	0.50	0.50

På samma sätt som i fallet produkt av två stokastiska variabler kan skillnaden i fördelningsfunktionens värden beräknas direkt. Den grafiska representationen av denna skillnad visas i FIG 6-16 och resultat av den numeriska behandlingen redovisas i TAB 6-8.

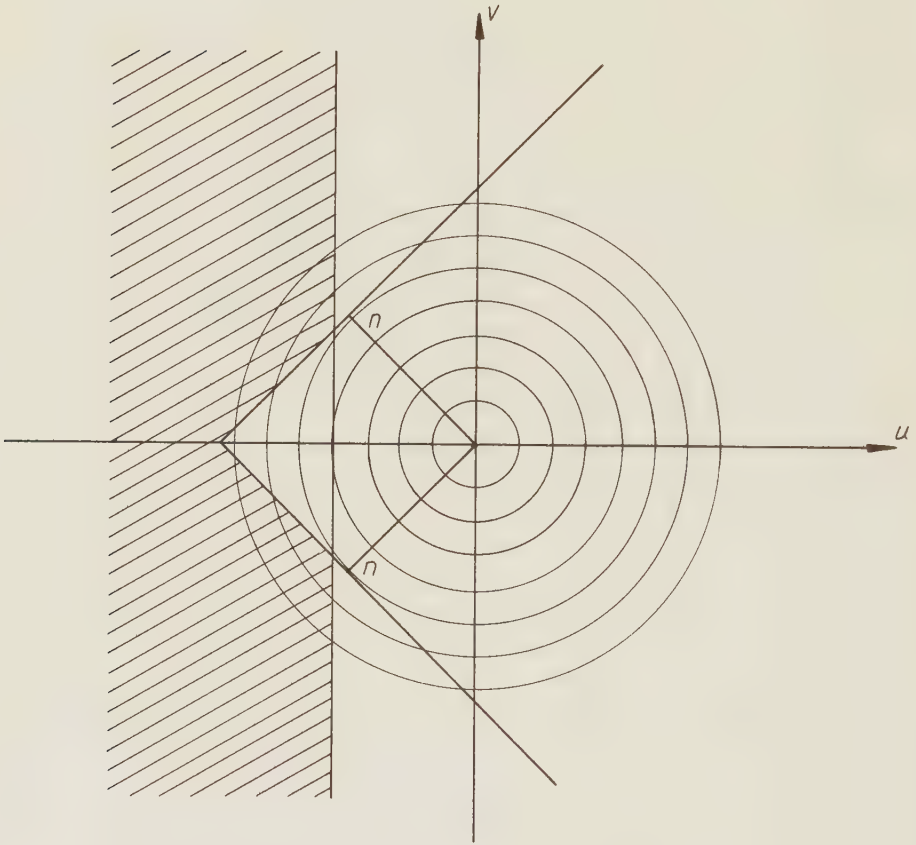


FIG 6-16. Skillnad i fördelningsfunktionens värde för en summa av trunkerade variabler.

TAB 6-8. Skillnad i fördelningsfunktionens värde för en summa av trunkerade variabler. ($\delta = 0.2$)

$t = z / \bar{M}$	$\Delta F_T(t)$		
	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
0.1	0	0	0
0.2	0	0	0
0.3	0	0	0
0.4	0	0	0
0.5	0	0	0
0.6	0	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$1.9 \cdot 10^{-8}$
0.7	0	$8.5 \cdot 10^{-7}$	$5.5 \cdot 10^{-8}$
0.8	$1.1 \cdot 10^{-5}$	$2.7 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$
0.9	$4.4 \cdot 10^{-5}$	$6.8 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-7}$
1.0	$1.3 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$	$3.3 \cdot 10^{-7}$
1.1	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$	$4.2 \cdot 10^{-7}$
1.2	$6.6 \cdot 10^{-4}$	$3.7 \cdot 10^{-5}$	$5.1 \cdot 10^{-7}$
1.3	$1.1 \cdot 10^{-3}$	$4.8 \cdot 10^{-5}$	$5.5 \cdot 10^{-7}$
1.4	$1.7 \cdot 10^{-3}$	$5.7 \cdot 10^{-5}$	$5.7 \cdot 10^{-7}$
1.5	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$6.0 \cdot 10^{-5}$	$5.7 \cdot 10^{-7}$
1.6	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$6.3 \cdot 10^{-5}$	$5.7 \cdot 10^{-7}$
1.7	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$6.3 \cdot 10^{-5}$	$5.7 \cdot 10^{-7}$
1.8	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$6.4 \cdot 10^{-5}$	$5.7 \cdot 10^{-7}$
1.9	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$6.4 \cdot 10^{-5}$	$5.7 \cdot 10^{-7}$
2.0	$2.7 \cdot 10^{-3}$	$6.4 \cdot 10^{-5}$	$5.7 \cdot 10^{-7}$

För ökande värden på t närmar sig skillnaden samma gränsvärden som beskrevs i avsnitt 6.4.1 och finns redovisade i TAB 6-5. Precis som vid multiplikation av stokastiska variabler har trunkering betydelse endast då svansen hos fördelningen utnyttjas för skaderiskberäkningar.

6.5 Fiktiva värden på säkerhetsindex

Statistiska verifikationsmetoder tillhörande nivå II förutsätter vanligtvis ostympade normalfördelade variabler. För det fall att någon eller några variabler är trunkerade finns för närvarande ingen metod att beakta detta. Nedan beskrivs ett sätt att ta hänsyn till trunkering för en verifikationsmetod enligt nivå II. Metoden finns beskriven i kap 3 men återges här i korta drag.

Det generella uttrycket för brottvillkoret skrives som

$$g = (X_1, X_2, X_3, \dots, X_n) \leq 0 \quad (6-54)$$

och säkerhetsvillkoret som

$$P(g \leq 0) \leq \varepsilon \quad (6-55)$$

Dimensioneringsvillkoret uttryckes nu enligt

$$g = (X_1^*, X_2^*, X_3^*, \dots, X_n^*) = 0 \quad (6-56)$$

där X_i^* är dimensioneringsvärden definierade som

$$X_i^* = \bar{X}_i - \alpha_i \beta_i \sigma_i \quad (6-57)$$

där α_i är vikter definierade enligt

$$\alpha_i = \frac{\frac{\partial g}{\partial X_i} \beta_i \sigma_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial g}{\partial X_i} \beta_i \sigma_i \right)^2}} \quad (6-58)$$

β_i är säkerhetsindex

σ_i är standardavvikelse för variabel X_i

Vikterna α_j är definierade generellt under förutsättning av att funktionen g med acceptabel noggrannhet kan lineariseras. Är g en linjär funktion av normalfördelade variabler eller en funktion av en stokastisk normalfördelad variabel leder metoden till "exakt" resultat.

Ekvationen 6-56 går inte att lösa direkt eftersom vikterna α_j ska beräknas i dimensioneringspunkten och det är just denna som ska beräknas i ekv 6-56. Lösningen blir därför iterativ.

FIG 6-17 visar den dimensioneringssituation som metoden förutsätter, nämligen oberoende och obegränsade variabler R och S .

Metoden ser till att om värdena $\bar{R} - \beta \sigma_R$ och $\bar{S} + \beta \sigma_S$ avskär fraktilen ϵ under f_R resp. f_S så avskär linjen $R - S = 0$ volymen ϵ under den simultana frekvensfunktionen $f_R f_S$.

För det fall att bärformågan R är trunkerad vid n standardavvikelser kan på försök R^* flyttas till trunkeringspunkten. Två ytterlighetsfall, $\sigma_R \gg \sigma_S$ och $\sigma_R \ll \sigma_S$, av denna åtgärd illustreras i FIG 6-18 och 6-19. Flyttning kan naturligtvis endast komma ifråga i det fall att R^* finnes vara mindre än värdet i trunkeringspunkten.

Metodens tillämpbarhet har provats genom numeriska beräkningar för varierande val av parametervärden. Beräkningen har tillgått så att för varje kombination av parametervärden har S^* och R^* itererats fram i dator, därefter tilldelas R^* -värdet $\max |\bar{R} (1 - \alpha_R \beta \delta_R)|$, $\bar{R} (1 - n \delta_R)|$, R^* ger ett värde på $\bar{R}$ vilket i sin tur ger $\theta = \bar{R}/\bar{S}$. Är R och S oberoende och normalfördelade kan säkerhetsindex β beräknas med hjälp av ett approximationsuttryck precis som i avsnitt 6.3. Det beräknade β -värdet har därefter jämförts med det ursprungliga.

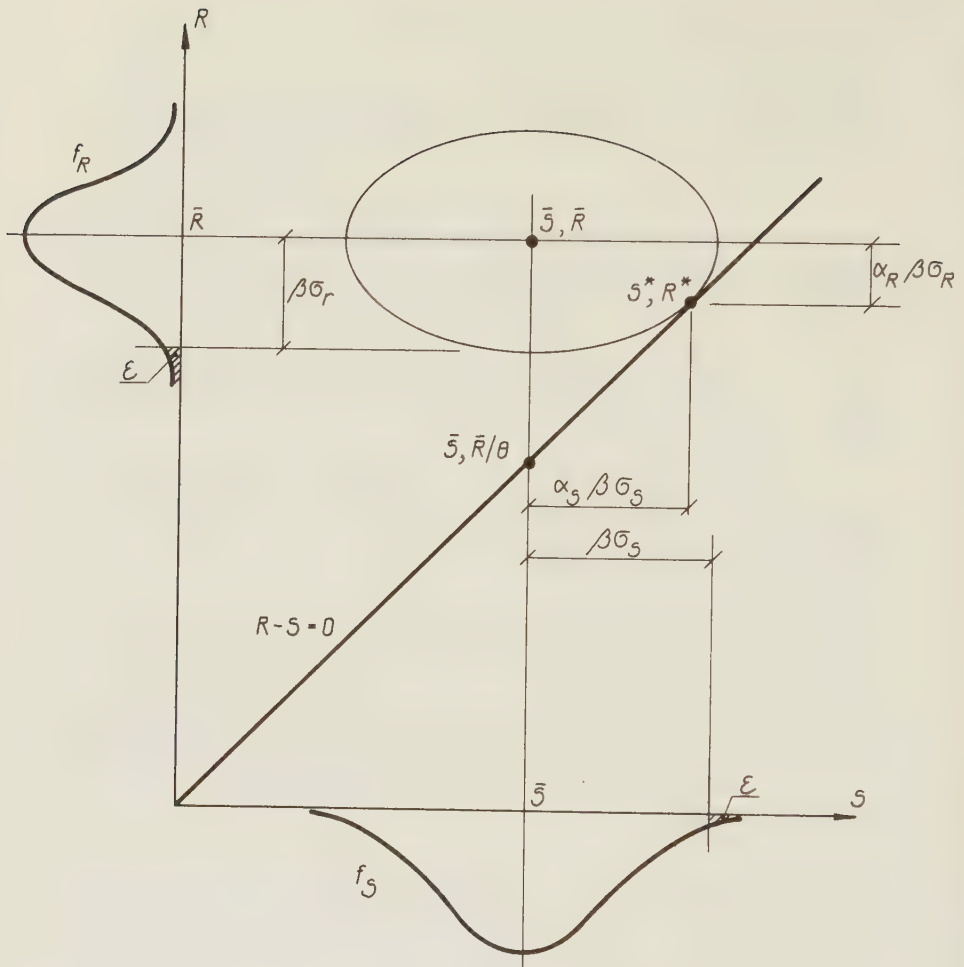


FIG 6-17. Princip för dimensionering.

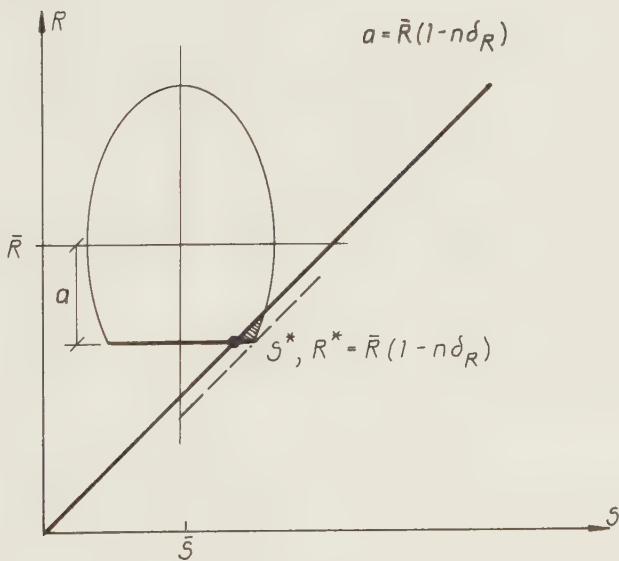
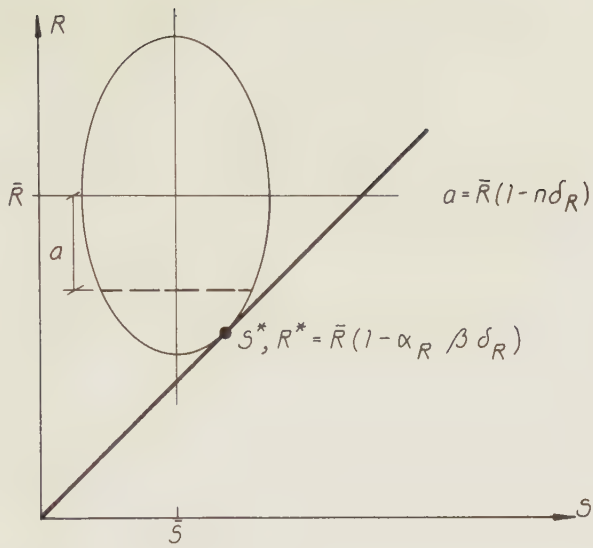


FIG 6-18. Flyttning av dimensioneringsvärdet för R till trunkeringsvärdet då $\sigma_R \gg \sigma_S$.

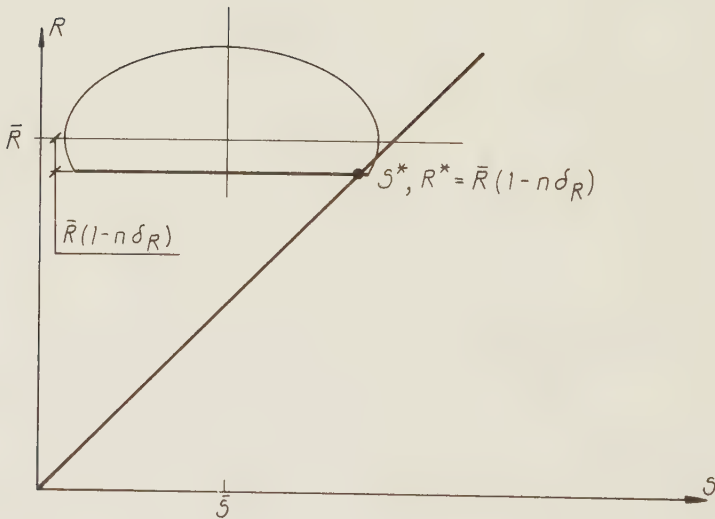
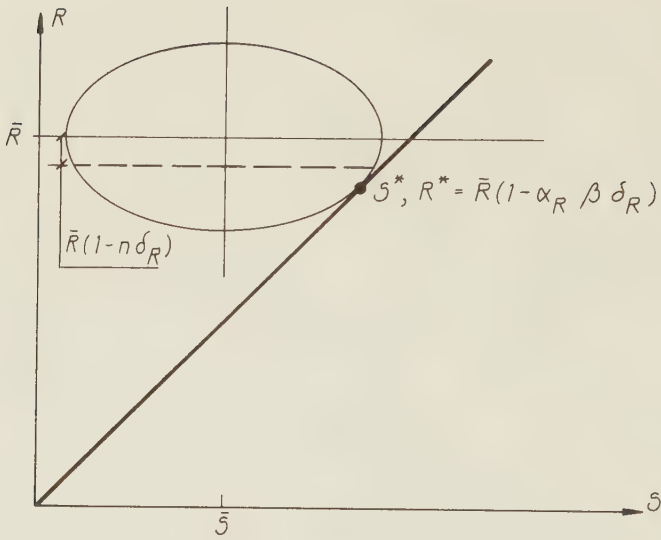


FIG 6-19. Flyttning av dimensioneringsvärdet för R till trunkeringsvärdet då $\sigma_R < \sigma_S$.

Variablerna G, P och R antages vara normalfördelade och de valda parametervärdena är

$$\delta_R = 0.05, 0.1, 0.15, 0.20$$

$$\delta_G = 0.05$$

$$\delta_P = 0.2, 0.3, 0.4$$

$$n_R = 3, 4, 5$$

$$\alpha = \bar{P}/\bar{G} = 0.2, 1, 6$$

$$\beta = 4, 5, 6$$

Av praktiska skäl har $\bar{G} + \bar{P} = \bar{S}$ satts till 1.

Först beräknas δ_S

$$\delta_S = \frac{\sigma_S}{\bar{S}} = \frac{\sqrt{\sigma_G^2 + \alpha^2 \sigma_P^2}}{1 + \alpha} \quad (6-59)$$

För antaget värde på $\bar{R}$ beräknas

$$\alpha_R = \frac{R \cdot \delta_R}{\sqrt{(\bar{R} \delta_R)^2 + (\sigma_G^2 + \alpha^2 \sigma_P^2) / (1 + \alpha)^2}} \quad (6-60)$$

och

$$\alpha_S = \frac{\sqrt{\sigma_G^2 + \alpha^2 \sigma_P^2} / (1 + \alpha)}{\sqrt{(\bar{R} \delta_R)^2 + (\sigma_G^2 + \alpha^2 \sigma_P^2) / (1 + \alpha)^2}} \quad (6-61)$$

Därefter beräknas S^* och R^* ur

$$S^* = 1(1 - \alpha_S \beta \delta_S) \quad (6-62)$$

$$R^* = \bar{R}(1 - \alpha_R \beta \delta_R) \quad (6-63)$$

Är $R^* = S^*$ med mindre än 1% fel accepteras det aktuella värdet på $\bar{R}$.

Kontroll görs huruvida nytt värde på R^* är aktuellt. I så fall erhålles ett nytt R^* ur uttrycket

$$\bar{R} = R^* / (1 - n \delta_R) \quad (6-64)$$

Värdet på skaderisken ϵ har erhållits genom numerisk integration i skadeområdet. Motsvarande β -värde har därefter erhållits ur approximationen för normalfördelningens fördelningsfunktion. Beräkningarna visar att godtagbara resultat erhålles för kombinationer där $\sigma_R < \sigma_S$ dvs en dimensioneringssituation illustrerad i FIG 6-19, medan för det motsatta fallet $\sigma_R > \sigma_S$ skaderisken blir större (β blir mindre) än den ursprungliga. FIG 6-18 avslöjar varför. Det skuggade området i figuren ger ett tillskott till skaderisken som är större än acceptabelt. En förändring av värdet på R^* så att gränskurvan faller i skärningspunkten mellan trunkeringslinjen och den nivålinje som svarar mot valt β -värde borde eliminera olägenheten med överskattat β -värde.

Samma typ av beräkning och samma parametervärden kan användas för att kontrollräkna detta fall. Ekvationerna ändras dock något vilket framgår av FIG 6-20, där variablerna för tydlighets skull transformerats om till dimensionslösa variabler.

Vid ändring av dimensioneringsvärdet för R ändras även dimensioneringsvärdet för S varför en ny iterationsprocess måste göras även för detta fall.

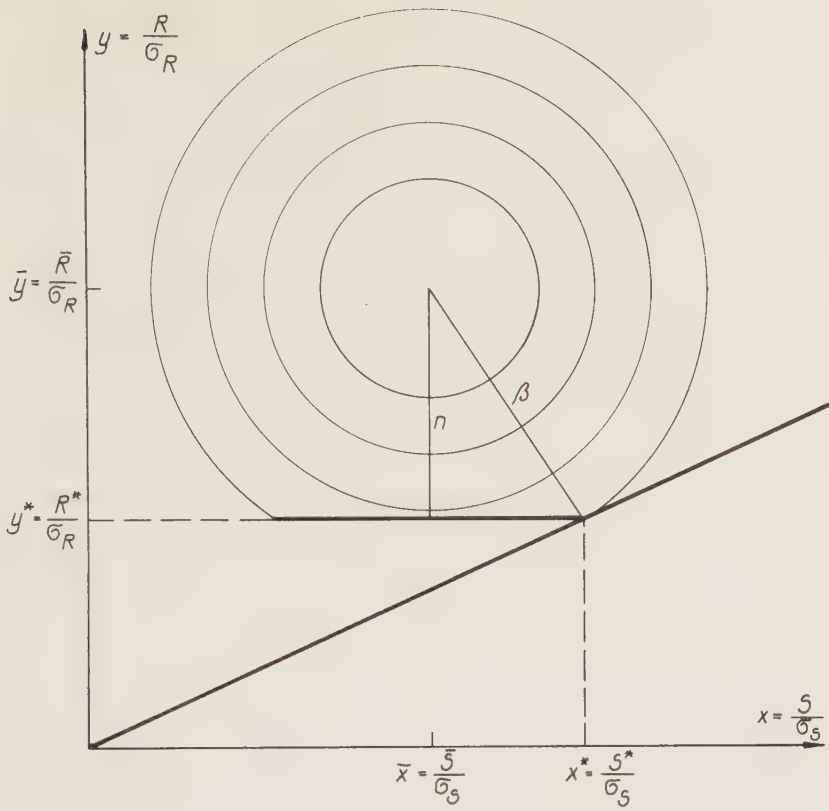


FIG 6-20. Flyttning av dimensioneringsvärdet för R.

Ur FIG 6-20 erhålles

$$y^* = \bar{y} - n \quad (6-65)$$

$$\chi^* = \bar{\chi} + \sqrt{\beta^2 - n^2} \quad (6-66)$$

$$R^* = \bar{R}(1 - n\delta_R) \quad (6-67)$$

$$S^* = \bar{S} + \sqrt{\beta^2 - n^2} \sigma_S \quad (6-68)$$

I analogi med ekv (6-51) erhålles

$$\alpha_R = \frac{n}{\beta} \quad (6-69)$$

och

$$\alpha_S = \frac{\sqrt{\beta^2 - n^2}}{\beta} \quad (6-70)$$

Beräkningsresultaten visar att ingen underdimensionering uppstår för de val av parametervärden som gjorts. Nedan visas en sammanställning av maximalt erhållna β -värden för varierande värden på nominellt säkerhetsindex och trunkeringsavstånd.

TAB 6-9. Erhållna maximala värden på säkerhetsindex

Nominellt säkerhetsindex β	Trunkeringsavstånd n_R		
	3	4	5
4	4.95*	4.64	4.01
5	5.77*	5.74*	5.40
6	6.71*	6.71*	6.71*

Värden markerade med asterisk är värden beräknade med ändrade dimensioneringsvärden. Att även andra värden avviker från de nominella är enbart orsakat av trunkeringen.

7 KRAV

7.1 Antagande och formulering av krav

Som tidigare omnämnts i avsnitt 2.5 är målsättningen med kravformulering att tillgodose önskemål ställda av samtliga inblandade i byggprocessen och avnämarna av dess produkter. Naturligtvis kan inte kraven lösas upp i strängt specificerade regler för varje tänkbar kombination av konstruktionslösningar. Formuleringen av krav hålls därför i allmänna och övergripande ordalag för att, inom kravets ram, ge möjlighet till fritt val av konstruktionslösning och kostnadsoptimering.

Krav på enkla verifieringsregler styr även kravformuleringen, exempelvis kan krav på begränsade svängningar hos lätta bjälklag utsatta för personlastar med större eller mindre framgång tillgodoses genom att begränsa nedböjning av statisk last.

Andra varianter på kravformulering kan vara funktionskrav contra krav reglerat genom angivelser. Exempelvis kan ett funktionskrav formuleras så att aktuellt krav ska vara uppfyllt med viss given sannolikhet. För krav uppfyllt genom angivelse gäller istället att principen för uppfyllandet att kravet framgår av formuleringen. I kravformuleringen måste utrymme lämnas till uppträdande fenomen som i byggnadskonstruktioner är ofrånkomliga t ex är det orimligt att kräva att inga nedböjningar ska uppträda likaså att kräva att inga sprickor får förekomma i ett bostadshus av betong. Kravnivån blir därför beroende av funktionen. Större sprickbredder kan tillåtas i vissa lokaltyper men inte i andra. Anledning att begränsa nedböjningar kan öka i takt med estetiska krav eller uppträdande konstruktionstekniska olägenheter. Även brottsäkerhet är ett krav som med fördel kan differentieras beroende på funktion. I och med införandet av nya normer har också innebörden av risk som sannolikhetsbegrepp betonats. Ovederhäftiga uttryck som "100 procentig säkerhet" och

"risken för brott är osannolik" kommer med tiden att försvinna och ersättas av ur statistisk synpunkt mer strikta termer. Önskemål om differentiering kan tillgodoses genom indelning i olika gränstillstånd. Antal gränstillstånd som uppställs blir en funktion av önskemål, kostnad för och möjlighet till beräkning, nytta etc. Normalt nöjer man sig med två typer, ett bruksgränstillstånd och ett brottgränstillstånd. Differentiering av krav i brottgränstillstånd kan göras genom indelning i säkerhetsklasser där varje klass tilldelas ett säkerhetsmått som är oberoende av konstruktionsmaterial. Krav i brukstillstånd regleras av att ett överskridande av tillståndet endast ska medföra måttlig olägenhet. Vid precisering av kravnivån måste dock den måttliga skadan värderas på något sätt och en koppling till samtliga konstruktionsmaterial måste göras.

Precisering av krav kan göras strikt t ex nedböjning av nyttolast får inte överstiga $L/400$ vid ogynnsammaste lastställning. Konstruktionens kvalitet blir emellertid en konsekvens av vald konstruktionsutformning. Nedanstående exempel belyser hur en konstruktions-typ kan bli känsligare för utförandefel jämfört med en annan.

Antag att ett träbjälklag över källare i bostadshus enligt FIG 7-1 ska kontrolleras. Ingående bjälkar är 45 x 195 T20 c/c 600. Maximalt tillåten böjpåkänning är 8 MPa och nedböjning av nyttolast får vara maximalt $L/400$.

Totallängden hos bjälklaget är 10.2 vilket innebär att minst en skarv erfordras. Delarna skarvas med ipressade spikplåtar på bägge balksidorna vilket gör skarven till en bokstavlig led.

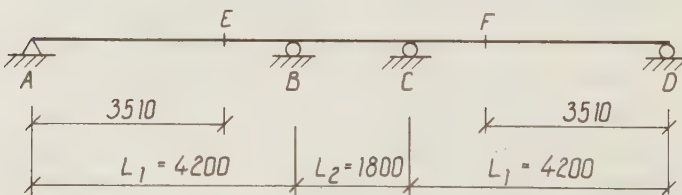


FIG 7-1. Upplagsförhållanden för bjälklag.

Nyttolasten består av 0.5 kN/m^2 vilande last och 1.0 kN/m^2 rörlig last. Egentyngd hos bjälklaget är 0.3 kN/m^2 .

Beräknad påkänning för ett fack räknat som fritt upplagd balk ger

$$\sigma = \frac{1.08 \cdot 4.2^2}{8 \cdot 0.285} = 8.4 \text{ MPa}$$

dvs vad bärförmåga beträffar är konstruktionen något underdimensionerad om bjälkarna skarvas över stöd.

Beräknad nedböjning blir

$$y = \frac{5 \cdot 0.9 \cdot 4.2^4 \cdot 10^{-3}}{384 \cdot 8000 \cdot 2781 \cdot 10^{-8}} = 0.0164 \text{ m} > 0.0105$$

vilket är större än tillåtet värde.

Väljes istället att placera skarven i ytterfack i momentnollpunkt för jämnt utbredd nyttolast erhålles skarvplacering i punkt E och F i FIG 7-1. Maximal påkänning blir därvid mindre än 8 MPa i samtliga snitt. Nedböjning i ytterfackets mittsnitt blir

$$y = (0.00296 + 0.00078 + 0.00012) \cdot \frac{2.1}{3.51} + 0.00763 = 0.00994 \text{ m}$$

Minskas lasten i mittfack med rörlig lastandel erhålles en större nedböjning vars storlek kan bestämmas med hjälp av FIG 7-2.

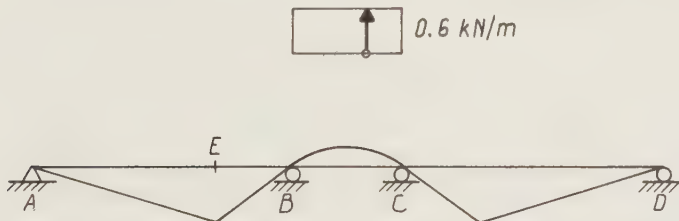


FIG 7-2. Deformationsfigur för rörlig lastandel i mittfack.

Deformationstillskottet vid leden E blir

$$\Delta y = \frac{0.6 \cdot 1.8^3 \cdot 10^{-3}}{24 \cdot 8000 \cdot 2781 \cdot 10^{-8}} \cdot 0.69 = 0.000452 \text{ m}$$

Maximal nedböjning som approximerats med nedböjning i mittnitt, blir nu

$$y = 0.00994 + \frac{2.1}{3.51} \cdot 0.000452 = 0.0102 \text{ m}$$

vilket är mindre än uppställt krav och därför formellt godtagbart.

Det kan således vara frestande att placera skarvar i ytterfack för att beräkningsmässigt minska deformationerna. Åtgärden kan emellertid leda till en konstruktion med sämre egenskaper om inte utförandet svarar mot förutsättningarna i beräkningen. Normalt är ett bostadsbjälklag utsatt för koncentrerade laster och inte som modellen förutsatt jämnt utbredd last. I fallet skarv över upp-
lag och en koncentrerad last på P kN i mittnitt hos ytterfack blir maximal nedböjning i mittnitt

$$y = \frac{P L_1^3}{48 EI}$$

I fallet skarv i ytterfack blir nedböjning i mittnitt

$$y = 0.626 \frac{P L_1^3}{48 EI}$$

dvs som väntat något mindre.

Blir av någon anledning ett av mellanstöden utfört på ett sådant sätt att förutsättningen om orubbliga stöd ej kan uppfyllas ändras förhållandena för fallet skarv i ytterfack så att detta blir ogynnsammare än om skarven förlagts till stödsnitt. Dylika utförandefel kan uppstå t ex då balkupplaget befinner sig över dörröppning eller liknande håltagning i bärande vägg. Uppträder

en oförväntad stödsänkning alternativt låg bäddningsmodul hos ett innerstöd blir konsekvensen måttlig i det fall bjälken skarvats över stödet medan skadan blir av större omfattning för det fall att skarv förlagts i ytterfack. Skulle, av någon anledning, ett av mittstöden uppfylla förutsättningarna för ett elastiskt stöd snarare än ett orubbligt kan tilläggsnedböjningarna för de aktuella fallen beräknas och jämföras.

För en punktlast P i fackmitt och en bäddningsmodul k kN/m för ett av innerstöden blir tilläggsnedböjning $P/2/k$ om skarv ligger över stöd. Då skarv placerats i ytterfack fås maximal tilläggsnedböjning vid skarv om lasten placeras i skarvsnitt. Tillägget blir $1.92 P/k$.

Jämförelsen ovan gäller endast statisk last. Naturligtvis sker även en ändring av egensvängningsfrekvensen hos systemet så att svängningar inducerade av personer i rörelse blir mer märkbara.

Uppenbarligen är inte kravet på maximal nedböjning av utbredd nyttolast en garanti för kvalitet. Med hänsyn till vad exemplet ovan visar är kvalitetsgraden beroende av giltighet hos gjorda antaganden på ett sådant sätt att funktionskravet inte uppfylls med tillräcklig säkerhet.

Ett annat exempel där känslighet för skador blir större än acceptabelt är en konstruktionslösning enligt FIG 7-3 som visar en vy över en del av en enplans hallbyggnad. Genom att utnyttja negativa stödmoment över pelare kan dimensionerna hos takbalken minskas.

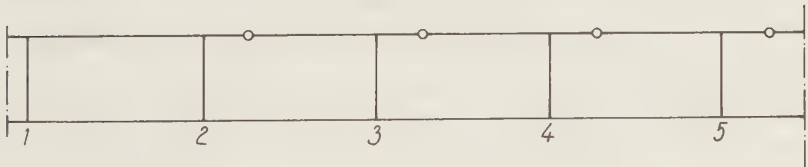


FIG 7-3. Vy över del av hallbyggnad.

Konstruktionen kan uppfylla krav på styvhet och bärförmåga men inte krav på förhindrande av fortskridande ras. Om pelare 1 i FIG 7-3 slås ut genom t ex påkörning ramlar samtliga takbalkar i pelarraden ner.

Utformning och tolkning av normtexten ligger till grund för olika konstruktionslösningar. Bland konstruktörer finns en tendens att uppfatta av samhället ställda krav som något absolut vilket medför att insatserna koncentreras mer mot målet att uppfylla krav, så som de är formulerade, än att försäkra sig om konstruktioners kvalitet.

7.2 Möjligheter till precisering av krav

Den differentiering av risker som är önskvärd kan tillgodoses genom införande av olika risknivåer eller säkerhetsklasser. Problem uppstår först när nivåerna ska kvantifieras. Det finns i princip två sätt att göra detta. Ett sätt är att efter bedömning tilldela olika nivåer gränser för acceptabla sannolikheter för underskridande av krav. Ett annat är att kalibrera nu gällande praxis mot nya normförslag och uttrycka resultatet i form av säkerhetsindex. Valet av arbetssätt är beroende av den säkerhetsmetod som avses att användas. Ska metoder enligt nivå III reglera dimensioneringen kan med fördel sannolikhetsmått fastställas. Används metoden enligt nivå II kan den vara lämpligare att uttrycka säkerhetsmarginalerna som säkerhetsindex.

Bakom angivelser av acceptabla brottrisker måste ligga någon form av konsekvensanalys eller kostnadsoptimering. Det finns olika sätt att gå till väga. Den välkända metoden att minimera kostnad är ett sätt. I sin mest enkla form kan metoden uttryckas genom formeln

$$C_T = C_I + C_F P_F \quad (7-1)$$

där C_T är totalkostnad

C_I är summan av de kostnader som är att hänföra till uppförande och normal drift av byggnaden under dess livstid.

C_F är kostnader orsakade av skada.

P_F är sannolikheten att skada inträffar.

Den sista termen $C_F P_F$ är i verkligheten en summa av delskador och tillhörande sannolikheter men anges här symboliskt som en enhet. I modellen, som är linjär i penningvärde, är ingående kostnader kapitaliserad kostnad refererat till den tidpunkt kostnaden C_T beräknas. Under förutsättning av att ett optimalt värde på säkerhetsindex existerar kan ekv 7-1 användas till uppställnade av en "nyttofunktion" som funktion av säkerhetsmättet β .

Under antagande av olika former för C_N resp C_F kan totalkostnad som funktion av säkerhetsmättet β uppställas, alternativt kostnadsändring för det fall att erhållet säkerhetsindex avviker från det avsedda. Om t ex initialkostnaden kan uttryckas som en linjärfunktion av säkerhetsindex i närheten av ett i norm fastställt index och skadesannolikheten approximeras med en exponentialfunktion av β så kan ekv 7-1 skrivas

$$C_T = a_1 + a_2\beta + C_F \cdot a_3 e^{-a_4\beta} \quad (7-2)$$

Totalkostnaden C_T som funktion av β visas i princip i FIG 7-4 där det bl a framgår hur underdimensionering orsakar större totalkostnad än samma grad av överdimensionering mätt i säkerhetsindex β . Värdet β_0 i FIG 7-4 är ett optimum vilket uttryckt i samma termer som i ekv 7-2 blir

$$\beta_0 = -\frac{1}{a_4} \ln \frac{a_2}{a_3 a_4 C_F} \quad (7-3)$$

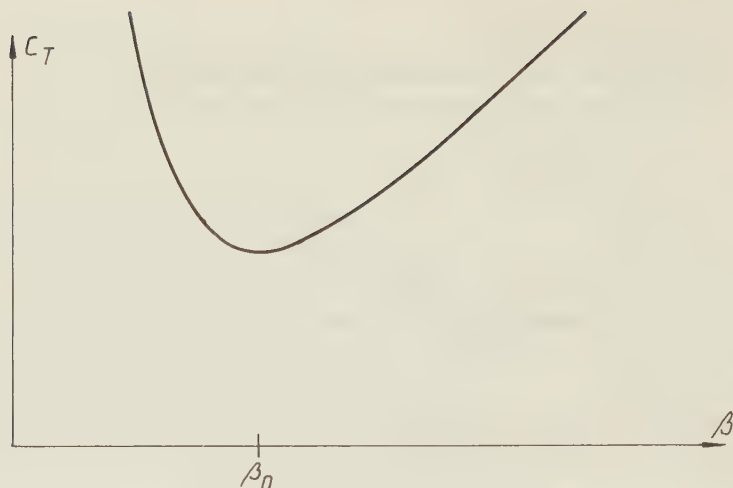


FIG 7-4. Totalkostnad som funktion av säkerhetsindex.

Värdet β_0 kan beräknas för ett givet lastfall, given konstruktion, given brottmod etc, vilket antyder att β_0 är långt ifrån ett konstant värde. En kalibrering av nu gällande normer skulle därvid ge olika säkerhetsnivåer beroende på i vilken punkt som kalibrering görs. Detta skulle tala för en metod där storleken hos säkerhetsindex för olika fall avgörs av en normkommitté, utan direkt koppling till tidigare normvärden. Detta stöter i sin tur på problem i form av otillräckligt underlag för bedömning. Val av säkerhetsindex orsakar fortfarande stort dilemma.

7.3 Exempel på kalibrering

7.3.1 Betongkonstruktioner

Under förenklade antaganden visas nedan ett exempel på hur en kalibrering mot gällande norm skulle kunna gå till. För nuvarande norm gäller beräkning enligt tillåtna påkänningar och som sannolikhetsteoretisk metod har valts en metod på nivå II. Med beteckningar och förutsättningar enligt BIL G och lastfall enligt FIG 7-5 kan beräkningen utföras.

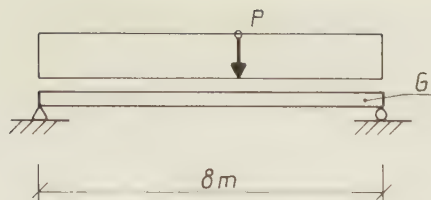


FIG 7-5. Lastfall för beräkningsexempel

Nuvarande norm använder en nomenklatur som skiljer sig något från den som är bruklig vid användning av sannolikhetsteoretiska metoder. För att över huvud taget kunna göra en jämförelse införs här vissa antaganden rörande lastens egenskaper. Egentyngdens dimensioneringsvärde antas lika med medelvärdet vid beräkning enligt B7. Vanligt lastvärde för nyttolast antas motsvara en 80%-fraktil och exceptionellt lastvärde en 98%-fraktil. Förutsättes nyttolasten vara normalfördelad kan vanligt och exceptionellt lastvärde beräknas om medelvärde och variationskoefficient för lasten är kända storheter.

Övriga valda storheter är

Egentyngd $\bar{G} = 20 \text{ kN/m}$

Nyttolast $\bar{P} = \kappa \bar{G} \quad \kappa = 0.2, 1, 6$

$\delta_G = 0.05$

$\delta_P = 0.40$

Lasten har antagits vara normalfördelad och bärförmågan log-normalfördelad.

Beräkningen har utförts på så sätt att mittnittet dimensionerats med k_b -metod vilket givit erforderlig armeringsarea. Tvärsnittet har därefter dimensionerats med sannolikhetsteoretisk

metod med erhållen armeringsarea som given och säkerhetsindex som okänd storhet. Praktiskt tillvägagångssätt liksom detaljresultat finns redovisat i BIL G. Här sammanställs erhållna värden på säkerhetsindex i TAB 7-1.

TAB 7-1. Sammanställning över beräknade värden på säkerhetsindex för en betongbalk.

$\bar{P}/\bar{G}$	Säkerhetsindex β
0.2	7.05
1	5.37
6	4.86

Resultatet visar att med de förutsättningar som givits varierar β med kvoten nyttolast/egentygd. Kalibreringen ger i detta fall inget generellt värde på säkerhetsindex.

7.3.2 Stålkonstruktioner

Under liknande förhållanden som i avsnitt 7.3.1 beräknas här säkerhetsindex för en stålbalk. Som tidigare detaljredovisas beräkningarna i BIL G. Här medtas endast förutsättningar och resultat.

För den räknade betongbalken gällde att effektiva höjden representerade en stokastisk dimensioneringsparameter. För stålbalken väljs att låta elastiska böjmotståndet vara en stokastisk variabel med medelvärde lika med det erforderliga böjmotståndet erhållet vid beräkning enligt tillåtna påkänningar. Variationskoefficienten sätts till 5%.

Vald stålqualität 1312 motsvaras enligt undersökningar utförda av Stålbyggnadsinstitutet av ett medelvärde för sträckgränsen på 271 MPa och en variationskoefficient på 0.106.

På samma sätt som i avsnitt 7.3.1 uppvisar resultatet en variation av säkerhetsindex med kvoten nyttolast/egentyngd, vilket återigen belyser svårigheten med att kalibrera fram entydiga värden på säkerhetsindex.

TAB 7-2. Sammanställning över beräknade värden på säkerhetsindex för en stålbalk.

$\bar{P}/\bar{G}$	Säkerhetsindex
0.2	5.53
1	4.74
6	4.40

7.4 Kravets beroende av konsekvens av brott

Säkerhetsfaktor för byggnadskonstruktioner är ett väl etablerat begrepp dock med olika innebörd beroende på vilka konstruktioner som avses. För geotekniska stabilitetsberäkningar exempelvis menas med säkerhetsfaktor kvoten mellan mothållande moment eller kraft och pådrivande moment eller kraft. I annat sammanhang kan säkerhetsfaktorn hänföras till enbart bärförmåga t ex tillåten stältpåkänning erhålles genom division av normerad sträckgräns-påkänning med säkerhetsfaktorn 1.5. Vad laster och lasteffekter beträffar blir begreppet säkerhetsfaktor mer vagt då inget bestämt värde kan insättas i nämnaren.

Säkerhetsfaktorn totalt dvs kvot mellan beräknad bärförmåga och beräknad lasteffekt för en konstruktion har historiskt getts högt värde för att kompensera bristen på relevant information om lasteffekter och bärförmåga. Efterhand som informationen vuxit rörande laster och då främst laster orsakade av klimatologiska förhållanden samt materialegenskaper har säkerhetsfaktorn gradvis sjunkit. Denna tendens är speciellt märkbar i U S A under de senaste årtiondena.

Säkerhetsfaktorns beroende av konsekvens av skada har för byggnadskonstruktioner skett huvudsakligen genom att ta hänsyn till brottmod för aktuell konstruktion samt till brotttyp, sprött eller segt. Vid en mer nyanserad utformning av dimensioneringssystem är målsättningen att även inkludera konsekvens av skada i någon mening. Här finns i huvudsak två skolor. Ett sätt är att ange acceptabla sannolikheter för varje konsekvens eller delgrupp av konsekvenser ett annat är att ge konsekvensen en dimension. Att uttrycka förlustrisken i penningvärde t ex är en metod som förespråkas av bl a många geotekniker. Metoderna är i stort jämförbara så länge man talar om skadekonsekvens. Vill man istället uttrycka tillförlitligheten dvs komplementet till skaderisken blir dimensionen kronor mer svårhanterlig.

Att värdera konsekvenser är en svår uppgift eftersom de till sin natur är mycket komplexa. För byggnadsstommar har det varit naturligt att framskrida i två steg - först uttrycka byggnadens säkerhet i ett dimensionslöst mått och därefter bestämma måttets storlek med hänsyn till konvekvenser.

Metoder att erhålla mått på skaderisk har diskuterats tidigare. Gemensamt för metoderna är behov av data rörande laster och bärförmåga. Bärförmåga kan definieras och undersökningar kan göras i avgränsade fält. Lastdata är mer svårdefinierbart och mer komplicerat att insamla. Till exempel är olika rumsdefinitioner ej helt entydiga. Ej heller lastställning är betydelselös. Lastundersökningar där föremål i ett rum endast vägs och noteras ger därför en icke tillräcklig information. Längs väggarna står vanligtvis tunga skåp och hyllor. Dessa flyttas sällan, vilket ger dem karaktär av bunden långtidslast. Lasten i den centrala delen av ett kontorsrum varierar istället kraftigt och lasttypen kan klassas som rörlig av ibland tillfällig karaktär.

Uppmätta lastvärden som i en förenklad modell ska motsvara uppträdande lasteffekter måste omvandlas enligt något antagande om influensytornas utseende för olika lasteffekter. På så sätt kan olika lastlägen beaktas. Normalt förhåller det sig så att olika lastställningar är karakteristiska för olika rumsfunktioner varför ibland lastvärden tillhörande olika rumstyper redovisas var för sig. En dylik finindelning kan dock inte tillgodogöras då lastvärden ska anges i normer eftersom dimensioneringen skulle bli onödigt omfattande och ej heller relevant med tanke på övriga osäkerheter.

Konstruktionsmaterial som t ex trä och betong påverkas av pålagda lasters varaktighet vilket ytterligare försvårar angivelser av lastvärden. Sannolikheten för att en last ska uppträda bör beaktas huvudsakligen av två orsaker dels den ovan angivna om inverkan på material dels att skaderisken blir lägre ju mer sällan en last uppträder. Det senare innebär att konstruktioner med låga värden på

kvoten nyttolast/egentyngd bör tilldelas högre värden på säkerhetsindex än för det fall att kvoten antar höga värden. Vid kalibrering av säkerhetsindex i avsnitt 7.3 erhöles också tendensen att säkerhetsindex ökade med minskande värde på kvoten nyttolast/egentyngd, vilket antyder kalibrering mot gällande norm som en framkomlig väg.

De osäkerheter och brist på information som idag föreligger rörande material i färdig konstruktion, lastens storlek etc har i dagens norm beaktats genom säkerhetsfaktorer. Med ökande information kan säkerhetsfaktorerna minskas. Graden av påverkan är dock inte närmare utbredd dvs hur mycket ökad information påverkar säkerhetsnivån och vad detta är värt byggnadsekonomiskt. För att veta svaret måste osäkerheter hos varje byggnadskomponent värderas och spaltas upp i olika delar för att möjliggöra uppskattningar av inverkan av ökad information dvs avgöra vad en undersökning av data verkligen är värd genom att beakta kostnadsbesparingar som kan hänföras till lägre säkerhetsnivå grundad på ökad kunskap.

Används en norm grundad på en sannolikhetsteoretisk bas är skadesannolikhet det närmast tänkbara måttet på säkerhet. Trots detta måste normtexten vara avfattad på ett mer eller mindre deterministiskt sätt. Normtexten borde innefatta kravet att en konstruktion ska vara beräknad så att en viss given skaderisk ej överskrides. En formulering som endast anger att en konstruktion ska ha en angiven högsta skaderisk kan i vissa fall vara otillräcklig. Inträffar en skada ska det inte vara möjligt att frita sig från ansvar genom att påstå att den inträffade skadan tillhör just den fraktil normen tillåter.

Säkerhetsmättet bör i någon mening spegla konsekvenser av skada. Denna möjlighet är också en av flera fördelaktiga omständigheter som tillmätts det sannolikhetsbaserade dimensioneringssystemet. Val av lämplig säkerhetsnivå hör till de mer delikata problemen eftersom det är intimt förknippat med människors uppfattning om

sin egen säkerhet contra byggnadskonstruktioners produktionskostnad. Säkerhetsnivån i ett deterministiskt system är till storlek okänd därför att säkerhetsfaktorn valts i stort sett intuitivt med kännedom om förväntad variation hos materialegenskaper och laster. En samlad bedömning av ansvariga normskrivare har utgjort grund för säkerhetsmåttens vars giltighet sällan ifrågasatts eller debatterats.

Uppgiften att ange storleken hos ett säkerhetsmått i ett sannolikhetsbaserat dimensioneringssystem antar större och alltmer ökande proportioner. Fler och fler faktorer börjar göra sig gällande vad avser betydelse för nivån hos säkerheten. Kopplingen är stark framförallt till konsekvens av brott. Här inverkar många delfaktorer som direkta kostnader t ex reparation eller utbyte av skadad del, kostnader förenade med förlust av liv och lem, förlorat anseende hos de inblandade etc.

Att ange ett säkerhetsmått med hänsyn till konsekvenser av brott innebär att väva samman inverkan av faktorer som kan mätas i penningvärde och faktorer där detta inte är möjligt. Faktorerna ska också viktas efter någon princip som trots människans irrationella handlingssätt ska vara optimal för hennes samhälle. Detta är idag en uppgift omöjlig att lösa direkt.

Några delkrav på byggnadsnormer är bl a att risken för personskada genom brott i byggnadsstommar ska vara låg jämfört med andra risker människan utsätts för. Krav ställs också på att normen ska vara rättvis gentemot konkurrerande byggmaterial. Kravet kan tillgodoses genom att föreskriva konstant säkerhet för alla material i samma situation. Det är dock inte säkert att en dylik lösning kan bibehållas om säkerhetsmättet ska erhållas genom kostnadsoptimering m a p samhällets uppställda mål.

Som en långsiktig målsättning kan säkerhetsmått relateras till optimala förväntade kostnader. Vid övergång från ett säkerhetssystem baserat på tillåtna påkänningar till ett sannolikhetsbaserat dimensioneringssystem bör istället säkerhetsnivåerna i största möjliga utsträckning anpassas till gällande norm genom någon form av kalibrering. Alltför stora hastiga förändringar i konstruktionsdimensioner skapar oro bland dem som byggt sin erfarenhet på ett dimensioneringsförfarande enligt gällande normer och som plötsligt finner att hittills framräknade dimensioner överdrivits.

Konstruktionsbestämmelser uppfattas ofta som givet bundna och inte som regler öppna för nya värderingar. Härav följer att en smidig övergång till nya säkerhetssystem torde vara att anpassa säkerhetsnivån på så sätt att inga oförklarade ändringar hos säkerhetsnivån uppträder samtidigt som dörren till framtida ändringar av värderingarna bör lämnas öppen. Säkerhetsnivån, bestämd t ex genom kalibrering av gällande norm och uttryckt i säkerhetsindex, varierar från fall till fall och ger därför ingen entydig lösning. Detta faktum går naturligtvis stick i stäv med ett tidigare nämnt krav att säkerhetsnivån inte drastiskt bör ändras. Kalibreringsproceduren ger en samling värden på säkerhetsindex vars värden kan uppvisa stora variationer. Val av säkerhetsindex ur erhållna värden kan därefter ske med beaktande av konstruktioners säkerhet, rättviseförhållanden till olika byggmaterial, konsekvens av brott etc. Likaså måste hänsyn tagas till om brott på grund av materialfel är mer sannolikt än brott på grund av extrema laster såsom jordbävning t ex. Säkerhetsnivån ska även spegla kostnaden vid olika typer av skador. T ex bör en konstruktionsdel med låg initialkostnad ges en hög säkerhetsnivå ifall brott hos delen i fråga medför stora kostnader som följd.

Dessa bland flera aspekter torde i förening med värden på säkerhetsindex kalibrerade från befintliga normer ge rimliga nivåer på säkerhetsindex att användas i säkerhetsmetoder enligt nivå II.

REFERENSER

Abramovitz, M & Segun, I; Handbook of Mathematical Functions.
Washington 1972.

Alpsten, Göran; Variations in Mechanical and Cross-Sectional
Properties of Steel. ASCE-IABSE, Planning and Design of
Tall Buildings, 1972.

Andersson, F, Svedman, H & Wester, R; En undersökning av korre-
lationen mellan olika geometriska imperfektioner samt deras
inverkan på bärförmågan. Rapport 69, Institutionen för
Byggnadsteknik, Tekniska Högskolan i Lund, 1976.

Ang, A; Extended reliability basis for formulation of design
criteria. University of Illinois, Urbana, Illinois.

Ang, A; Extended reliability basis of structural design under
uncertainties. University of Illinois, Urbana, Illinois.

Ang, A; Structural risk analysis and reliability based design.
Journal of the structural division, september 1973.

Ang, A & Cornell, A; Reliability basis of structural safety.
Journal of the structural division, September 1974.

Baratta, Alessandro; An improvement in the static method for
limit analysis of structures with stochastic strength
variations. Neapel 1973.

Barker, John; Reinforced concrete detailing, 1967.

Bellander, Ulf; Kontrollsystem vid dokumentation av betonghåll-
fasthet - kvalitetskriterier och provningsfrekvens, 1976.

- Bellander, Ulf; Hållfasthet i färdig konstruktion, 1977.
- Benjamin, J & Lind, N C; A probabilistic basis for a deterministic code. ACI Journal, november 1969.
- Benjamin, J, Shah, H & Tang, W; Statistical evaluation of load factors for dead and live loads. Stanford University, Stanford, California.
- Bonzel, Justus; Zur Gestaltsabhängigkeit der Betondruckfestigkeit. Beton- und Stahlbetonbau no 9, 1959.
- Borges, J F, Castanheta, M; Structural safety, Lissabon 1971.
- Buch, P; Zur Entwicklung der Sicherheitskonzeption für Baukonstruktionen. Bauplanung - Bautechnik, Heft 4 1974.
- Bulletin d'Information No 112; Joint Committee on Structural Safety - First Order Reliability Concepts for Design Codes. München 1976.
- Cohn, M Z & Parimi, S R; Multi-criteria probabilistic structural design. University of Waterloo, Ontario, Canada.
- Cornell, C A; A Probability - Based Structural Code. Journal of the American Concrete Institute, 1969.
- Cornell, Allin; Bounds on the reliability of structural systems. Journal of the structural division, february 1967.
- David, H A; Order Statistics, New York 1970.
- Feld, J; Public safety and construction surety. National Bureau of Standards, Special Publications 423 1974.

- Graf, Otto; Die Eigenschaften des Betons. Berlin 1960.
- Granholm, Hellström & Wästerlund; Betong, 1958.
- Grubbs, F E; Sample criteria for testing outlying observations.
Annual Math. Statist. 21, 1950.
- Hahn, G & Shapiro, S; Statistical Models in Engineering,
New York 1967.
- Hannus, M; Numerical analysis of structural reliability,
Helsingfors 1973.
- Hansen, Torben; Creep and Stress Relaxation of Concrete,
CBI Handlingar nr 31, 1960.
- Hasegawa, T, Sugiyama, M & Koh, Y: Influence of drying conditions
on the compressive strength and the modulus of elasticity
of concrete of structures. Rilem symposium i Stockholm 1979.
- Hasofer, A M & Lind, N C; An exact and invariant first-order
reliability format, 1974. Journal of the Eng. Mech. Div.
ASCE, Vol 100.
- Haugen, E; Probabilistic Approaches to Design.
- Houghes, B P & Bahramian, B; Cube tests and the uniaxial comp-
ressive strength of concrete. Magasin of Concrete Research:
Vol 17, nr 53 1965.
- Johnson, Arne; Strength, Safety and Economical Dimensions of
Structures. Stockholm 1953.

- Lewandowski, R; Beurteilung von Bauwerksfestigkeiten an Hand von Betongütewürfeln und -bohrproben. Düsseldorf 1971.
- Lind, N C; A Formulation of Probabilistic Design. University of Waterloo, Ontario, Canada. Paper no 128, 1974.
- Lind, N C; An Invariant Second Moment Reliability Format. University of Waterloo, Ontario, Canada. Paper no 113, 1972.
- Lind, N C; The Design of Structural Design Norms. University of Waterloo, Ontario, Canada. Report 89, 1971.
- Lind, N C; Consistent Partial Safety Factors. University of Waterloo. Ontario, Canada. Report 36, 1970.
- Lind, N C; Optimization of Economic Activities Under Public Regulation. University of Waterloo, Ontario, Canada. Report 27, 1974.
- Lind, N C & Basler, E; Safety Level Decisions. University of Waterloo, Ontario, Canada. Report 19, 1972.
- Lind, N C, Ravindra, M K & Siu, W; Some Examples of Code Calibration. University of Waterloo, Ontario, Canada. Report 17, 1972.
- Lind, N C & Davenport, A G; Towards Practical Application of Structural Reliability Theory. University of Waterloo, Ontario, Canada. Report 73, 1971.
- Lind, N C & Ravindra, M K; Theory of structural code optimization. Journal of the structural division, july 1973.

Lindgren, B W; Statistical Theory, London 1968.

Lipson, C & Sheth, N; Prediction of per cent failures from stress/strength interference. Dept. of mechanical engineering. University of Michigan.

Maage, M; Statisk elasticitetsmodul för betong. Nordisk betong no 3, 1979.

Mirza, S, Hatzinoholas, M & Mac Gregor, J; Statistical descriptions of strength of concrete. Journal of the structural division, june 1979.

Moran, P A P; Introduction to Probability Theory, Oxford 1968.

Moses, F; Reliability of structural systems. Journal of the structural division, september 1974.

Murzewski, J; Sicherheit der Baukonstruktionen, Berlin 1974.

Nelson, M & Sexsmith, R; Limitations in application of probabilistic concepts. ACI Journal, october 1969.

Nielsen, Anders; Evaluation of the scatter of the deformation parameters of concrete. Studies on Concrete Technology, Cement- och Betonginstitutet 1979.

Nylander, H; Betongramar med inre övertryck. Betong 1945:3.

Paloheimo, E & Hannus, M; Structural Design Based on Weighted Fractiles. Journal of the Structural Division, ASCE Vol 100, 1974.

- Pearson, E S & Hartley, H O; Biometrika Tables for Statisticians. Vol 1 3rd Ed, Cambridge University Press, 1966.
- Petersons, N; Sambandet mellan hållfasthet hos 15 cm kuber och 15 x 30 cm cylindrar. Nordisk Betong 1962:2.
- Petersons, N; Betongens, armeringens och armeringsplaceringens inverkan på den färdiga varans kvalitet. Cement och Betong 1962:2.
- Petersons, N; Betongens kvalitet i färdiga konstruktioner. CBI handlingar nr 46, 1973.
- Petersons, N; Armeringens och betongkvalitetens inflytande på brottmomentet. Nordisk Betong 1961:1.
- Pugsley, A; Practical limits to loadings and strength and their effects on safety. The structural engineer. Vol 48 no 12, december 1970.
- Randall, F; Historical notes on structural safety. ACI Journal, october 1973.
- Rao, K & Swamy, R N; A statistical theory for the strength of concrete. Cement and Concrete Research. Vol 4, 1974.
- Rackwitz, R; Statistische Untersuchung zur Betondruckfestigkeit in Stützen und Wänden. Beton nr 12, 1975.
- Rackwitz, R; Zur Statistik von Eignungs- und Zulassungsversuchen für Bauteile. Bauingenieur 56, 1981.
- Ravindra, M K & Lind, N C; Optimization of a Structural Code. University of Waterloo, Ontario, Canada. Report 72, 1971.

- Reese, R; Probabilistic approaches to structural safety.
ACI Journal, january 1976.
- Ros, M; Versuche und Erfahrungen an ausgeführten Eisenbeton-
bauwerken in der Schweiz. Zürich 1937.
- Rosenblueth, E; Code Specification of Safety and Service Ability.
ASCE - IABSE, Planning and design of tall buildings, TC 10.
Reports vol 1b-10, 1972.
- Rosenblueth, E; Towards optimum design through building codes.
Journal of the structural division, march 1976.
- Rüsch, Hubert; Stahlbeton - Spannbeton, Werkstoffeigenschaften
und Bemessungsverfahren, 1972.
- Sabnis, G & Saeed, M; Size effects in model concretes. Journal
of the structural division, june 1979.
- Schichert, Gerald; Schwellenwerte beim Betondruckversuch.
Berlin 1980.
- Sentler, Lars; A Live Load Survey in Domestic Houses. Report 47,
1974.
A Live Load Survey in Office Buildings and Hotels.
Report 56, 1974.
A Stochastic Model for Live Loads on Floors in Buildings.
Report 60, 1975.
Live Load Surveys. Report 78, 1976.
Lunds Tekniska Högskola, Lund.
- Sexsmith, R; Structural reliability decisions using bayesian
techniques. Cornell University, Ithaca, New York.

Skarendahl, Åke; Lättballast och lättballastbetong, 1973.

Tichy, M; Statistical Theory of Concrete Structures.
Prag 1972.

Turkstra, Carl; Choice of failure probabilities. Journal of the
structural division, december 1967.

Weigler, Karl; Stahlleichtbeton, Herstellung-Eigenschaften -
Ausführung, 1972.

Wirsching, P; Truncation errors in first-order reliability.
Journal of the structural division, november 1975.

Wästlund, Georg; Untersuchungen über die Festigkeit von Beton.
Stockholm 1934.

Zahn, J; Strength of brittlest - link structures. Forest Products
Laboratory, Madison, Wisconsin.

Akerlund, Sture; Statistiska metoder för beräkning av skaderisk.
Rapport 57, 1974. Lunds Tekniska Högskola, Lund.

Öfverbeck, P; Small Sample Control and Structural Safety. Report
TVBK-3009. Lunds Tekniska Högskola, Lund.

Approximativ beräkning av brottrisk vid trunkerade frekvensfunktioner

Normalfördelningens frekvensfunktion för S

$$f_S = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma_S} e^{-\frac{(S-\bar{S})^2}{2\sigma_S^2}} \quad (\text{A-1})$$

antages kunna approximeras med

$$f_S = \frac{1}{\sigma_S} a e^{-\alpha x} \quad (\text{A-2})$$

där

$$x = \frac{S - \bar{S}}{\sigma_S}$$

i intervallet $|x_u, x_{\bar{u}}|$

där x_u sätts till en standardavvikelse.

På approximationen läggs följande villkor

$$\frac{\sigma f(x_u)}{\psi(x_u)} = \frac{\sigma f(x_{\bar{u}})}{\psi(x_{\bar{u}})} \quad (\text{A-3})$$

$$\int_{x_u}^{x_{\bar{u}}} (\psi(x) - \sigma f(x)) dx = 0 \quad (\text{A-4})$$

Tre trunkeringsfall behandlas dels a) trunkering vid 3σ , dels b) trunkering vid 4σ samt c) trunkering vid 5σ .

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x_u &= 1 \sigma \\ x_{\bar{u}} &= 3 \sigma \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

$$\frac{a e^{-\alpha}}{0.242} = \frac{a e^{-3\alpha}}{0.00443} \quad (\text{A-6})$$

$$e^{2\alpha} = 54.63 \quad (\text{A-7})$$

$$\alpha = 2.0$$

$$\int_1^3 \sigma f(x) dx = \left[-\frac{a}{\alpha} e^{-\alpha x} \right]_1^3 = \frac{a}{\alpha} (e^{-\alpha} - e^{-3\alpha}) \quad (\text{A-8})$$

$$\int_1^3 \varphi(x) dx = \phi(3) - \phi(1) = 0.1574 \quad (\text{A-9})$$

$$\frac{a}{2} (e^{-2} - e^{-6}) = 0.1574 \quad (\text{A-10})$$

$$a = 2.37 \quad (\text{A-11})$$

x	$\sigma f(x)$	$\varphi(x)$	$\sigma f(x)/\varphi(x)$
1	0.321	0.242	1.33
1.5	0.118	0.130	0.91
2	0.043	0.054	0.80
2.5	0.016	0.018	0.89
3	0.0059	0.0044	1.34

$$\sigma f(x) = 2.37 e^{-2x} \quad (\text{A-12})$$

$$\text{b) } x_U = 1 \sigma$$

$$x_{\bar{0}} = 4 \sigma \quad (\text{A-13})$$

På samma sätt som tidigare erhålles

$$\frac{a e^{-\alpha}}{0.242} = \frac{a e^{-4\alpha}}{0.000134}$$

$$e^{3\alpha} = 1806$$

(A-14)

$$\alpha = 2.5$$

$$\frac{a}{2.5} (e^{-2.5} - e^{-10}) = 0.1587$$

(A-15)

$$a = 4.84$$

$$\sigma f(x) = 4.84 e^{-2.5x}$$

(A-16)

x	$\sigma f(x)$	$\varphi(x)$	$\sigma f(x)/\varphi(x)$
1	0.318	0.242	1.31
1.5	0.0910	0.130	0.70
2	0.0261	0.054	0.48
2.5	0.0075	0.018	0.42
3	0.00214	0.0044	0.49
3.5	0.000613	0.000873	0.70
4	0.000176	0.000134	1.31

$$c) \quad x_u = 1 \sigma$$

(A-17)

$$x_{\bar{0}} = 5 \sigma$$

Respektive a- och α -värden erhålles ur sambanden

$$\frac{a e^{-\alpha}}{0.242} = \frac{a e^{-5\alpha}}{1.487 \cdot 10^{-6}}$$

och

$$\frac{a}{\alpha} (e^{-\alpha} - e^{-5\alpha}) = 0.1587$$

vilket ger

$$\alpha = 3$$

(A-18)

$$\alpha = 9.56$$

$$\sigma f(x) = 9.56 e^{-3x}$$

(A-19)

x	$\sigma f(x)$	$\varphi(x)$	$\sigma f(x)/\varphi(x)$
1	0.476	0.242	1.97
1.5	0.106	0.130	0.82
2	0.024	0.054	0.44
2.5	0.0053	0.018	0.29
3	0.0012	0.0044	0.27
3.5	$2.63 \cdot 10^{-4}$	$8.73 \cdot 10^{-4}$	0.30
4	$5.87 \cdot 10^{-5}$	$1.34 \cdot 10^{-4}$	0.44
4.5	$1.31 \cdot 10^{-5}$	$1.60 \cdot 10^{-5}$	0.82
5	$2.92 \cdot 10^{-6}$	$1.49 \cdot 10^{-6}$	1.96

Fördelningsfunktionen för S erhålles ur

$$1 - F_S = \int_S^{S_{max}} f_S dS \quad (A-20)$$

Med $S = S_{max}$ då $x = n$ och $dS = \sigma_S dx$ erhålles

$$1 - F_S = \int_x^n f_S \sigma_S dx \quad (A-21)$$

där n anger antalet standardavvikelser från medelvärdet till trunkeringspunkten.

Övriga beteckningar framgår av FIG A-1.

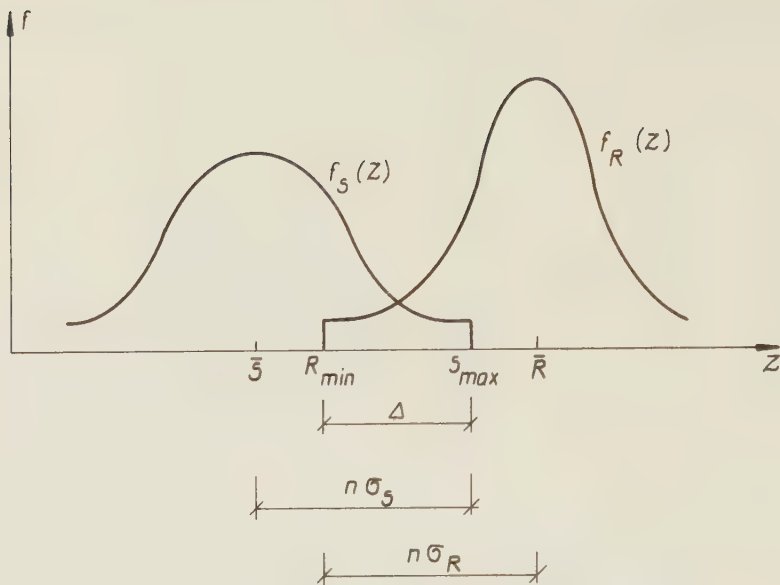


FIG A-1 Trunkerade frekvensfunktioner.

FIG A-1 Trunkerande frekvensfunktioner

$$1 - F_S(x) = \int_x^n a e^{-\alpha x} dx = \frac{a}{\alpha} \left[e^{-\alpha x} \right]_x^n = \frac{a}{\alpha} \left[e^{-\alpha x} - e^{-\alpha n} \right] \quad (\text{A-22})$$

f_R antages approximerad på samma sätt som f_S dvs

$$f_R(y) = \frac{1}{\sigma_R} a e^{-\alpha y} \quad (\text{A-23})$$

där

$$y = \frac{\bar{R} - R}{\sigma_R}$$

Ett värde på axeln R , S i FIG A-1 ($R = S$) kan skrivas på två sätt

$$R - S = \bar{R} - y \sigma_R = \bar{S} + x \sigma_S \quad (\text{A-24})$$

varur

$$\bar{R} - \bar{S} = x \sigma_S + y \sigma_R \quad (\text{A-25})$$

Överlappslängden Δ blir

$$\Delta = \bar{S} + n \sigma_S - (\bar{R} - n \sigma_R) \quad (\text{A-26})$$

varur

$$\bar{R} - \bar{S} = n \sigma_S + n \sigma_R - \Delta \quad (\text{A-27})$$

Med ekv (A-25) erhålles

$$x \sigma_S + y \sigma_R = n \sigma_R + n \sigma_S - \Delta \quad (\text{A-28})$$

varur

$$y = n + n \frac{\sigma_S}{\sigma_R} - \frac{\Delta}{\sigma_R} - x \frac{\sigma_S}{\sigma_R} \quad (\text{A-29})$$

Med beteckningarna

$$\frac{\sigma_S}{\sigma_R} = \mu, \quad \frac{\Delta}{\sigma_R} = \nu, \quad n + n\mu - \nu = \lambda \quad (\text{A-30})$$

erhålles

$$y = \lambda - \mu x \quad (\text{A-31})$$

Ekv (A-23) kan nu uttryckas i variabeln x

$$f_R(x) = \frac{1}{\theta_R} a e^{-\alpha(\lambda - \mu x)} \quad (\text{A-32})$$

Brottrisken ϵ erhålles ur uttrycket

$$\epsilon = \int_{R_{\min}}^{S_{\max}} f_R (1 - F_S) dR \quad (\text{A-33})$$

där

$$S = S_{\max} \quad \text{då } x = n$$

$$R = R_{\min} \quad \text{då } y = n \quad \text{dvs} \quad x = n - \frac{v}{\mu}$$

Med $dR = -\sigma_R dy = \sigma_R \mu dx$ erhålles

$$\epsilon = \mu \int_{n - \frac{v}{\mu}}^n a e^{-\alpha(\lambda - \mu x)} \frac{a}{\alpha} (e^{-\alpha x} - e^{-\alpha n}) dx \quad (\text{A-34})$$

Efter multiplicering och integrering erhålles

$$\epsilon = \frac{\mu a^2}{\alpha^2} \left[\frac{e^{-\alpha(\lambda + x - \mu x)}}{\mu - 1} - \frac{e^{-\alpha(\lambda - \mu x + n)}}{\mu} \right]_{n - \frac{v}{\mu}}^n \quad (\text{A-35})$$

Efter insättning av gränserna och med utnyttjande av att $\lambda = n + n\mu - v$ erhålles

$$\epsilon = \frac{\mu a^2}{\alpha^2} e^{-2n\alpha} \left[\frac{e^{\alpha v} - e^{\frac{\alpha v}{\mu}}}{\mu - 1} - \frac{e^{\alpha v} - 1}{\mu} \right] \quad (\text{A-36})$$

Med $a \cdot e^{-n \alpha} = f_0 =$ frekvensfunktionens värde i trunkeringspunkten och med

$$\frac{1}{\mu-1} = \frac{\sigma_R}{\sigma_S - \sigma_R}, \quad \frac{\mu}{\mu-1} = \frac{\sigma_S}{\sigma_S - \sigma_R}, \quad \alpha v = \alpha \frac{\Delta}{\sigma_R}, \quad \frac{\alpha v}{\mu} = \alpha \frac{\Delta}{\sigma_S}$$

erhållles

$$\varepsilon = \frac{f_0^2}{\alpha^2} \left[\frac{\sigma_R}{\sigma_S - \sigma_R} e^{\alpha \frac{\Delta}{\sigma_R}} - \frac{\sigma_S}{\sigma_S - \sigma_R} e^{\alpha \frac{\Delta}{\sigma_S}} + 1 \right] \quad (\text{A-37})$$

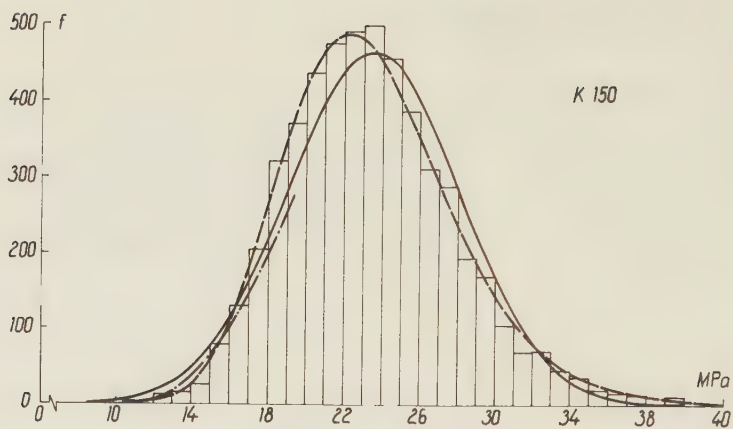
$$\varepsilon = \frac{f_0^2}{\alpha^2} \frac{1}{\sigma_R - \sigma_S} \left[\sigma_R \left(e^{\alpha \frac{\Delta}{\sigma_R}} - 1 \right) - \sigma_S \left(e^{\alpha \frac{\Delta}{\sigma_S}} - 1 \right) \right] \quad (\text{A-38})$$

Sammanställning av betongdata

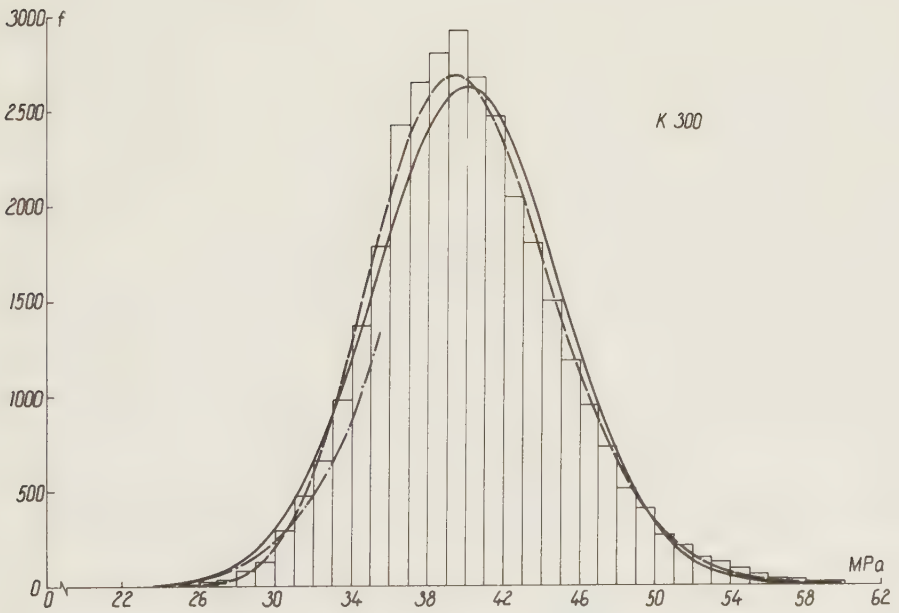
Bilagan redovisar erhållna seriemedelvärden från 10 års löpande provning av fabriksbetong vid svenska fabriker. Betongen är framställd i tillverkningsklass I och provningsresultaten redovisas i histogramform med klassbredden 1 MPa. Till materialet har anpassats tre olika typer av fördelningar enligt nedan.

	Kurvbeteckning
Normalfördelning	_____
Lognormalfördelning	- - - - -
Potensfunktion (enligt 5.2.2)	- . - . - .

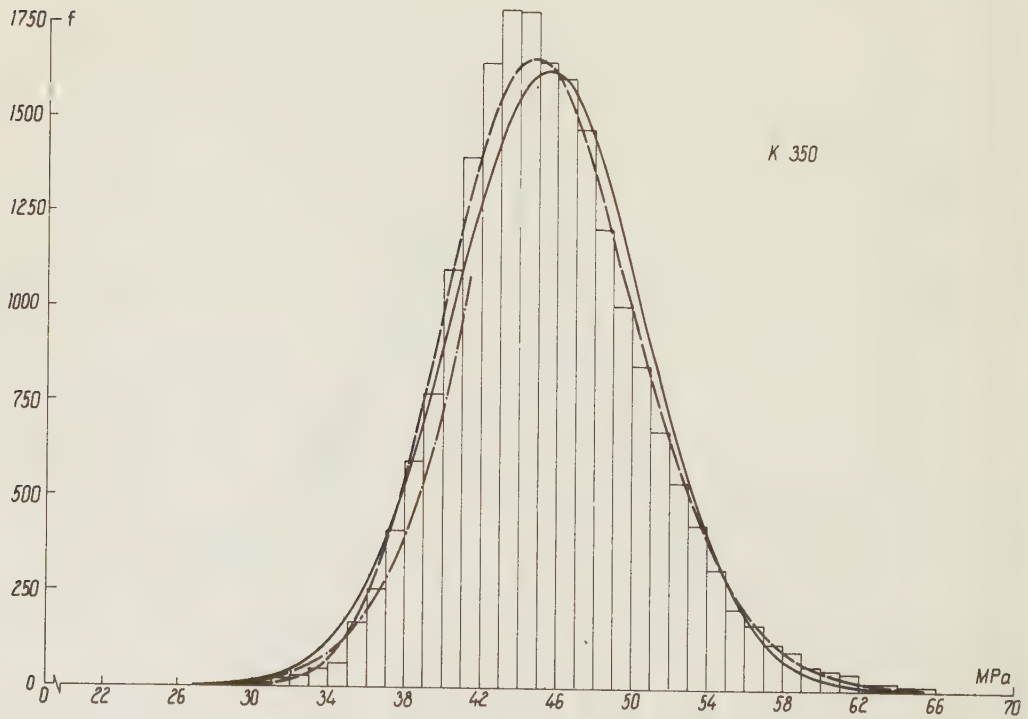
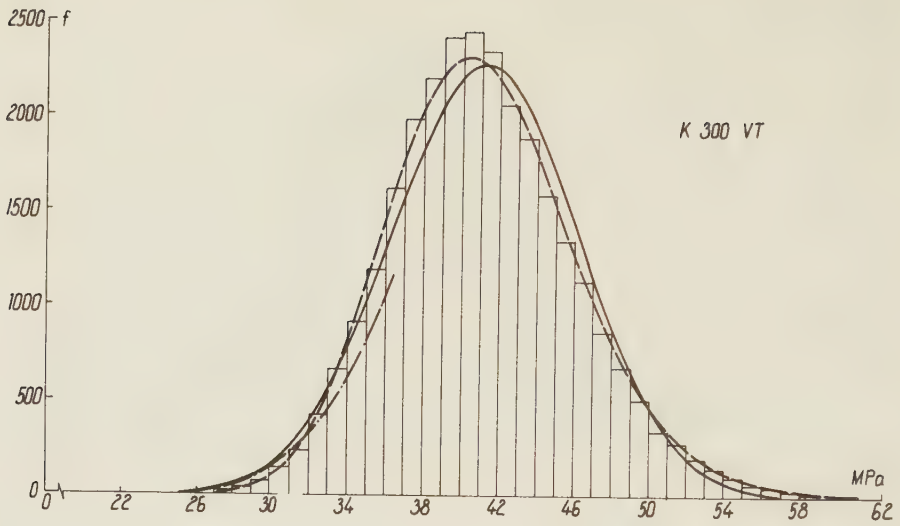
B2

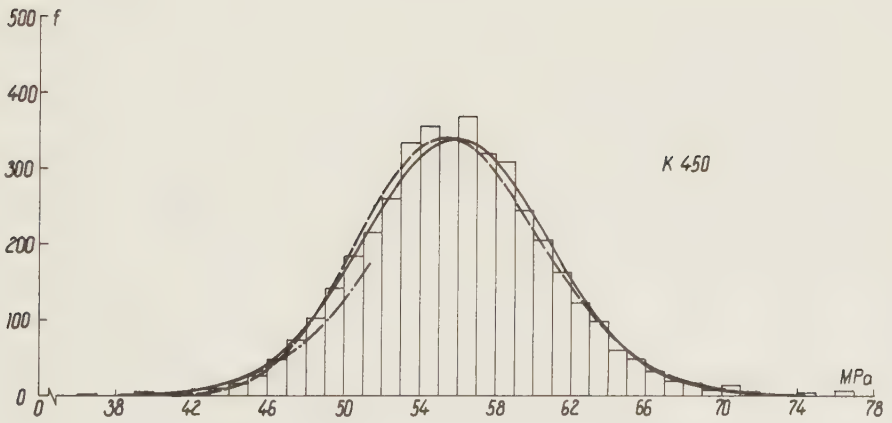


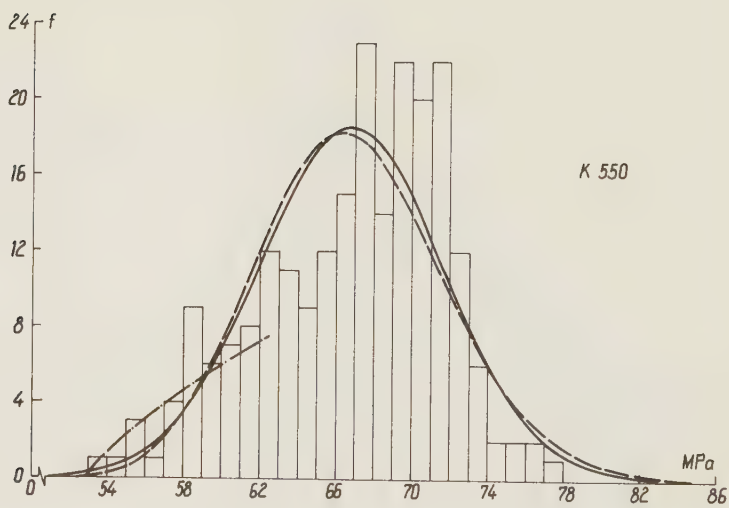
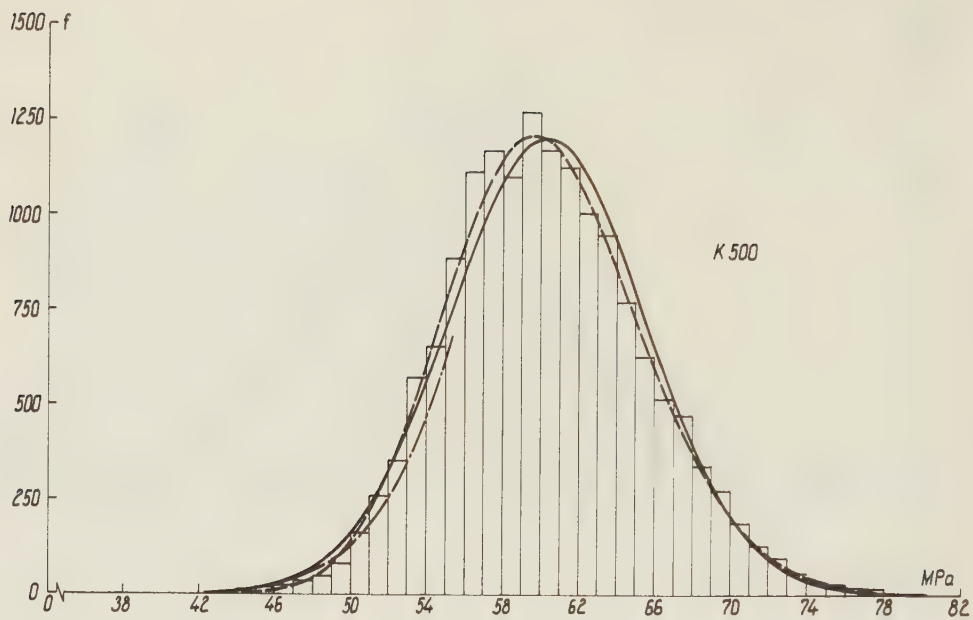
B3

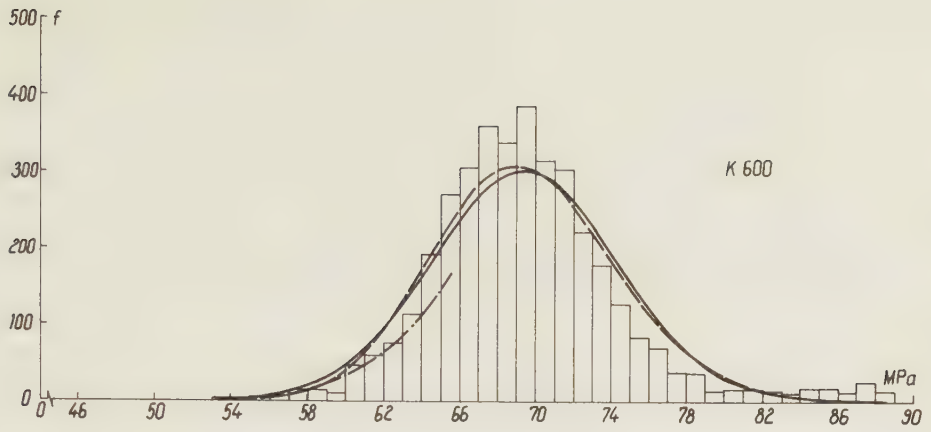


B 4







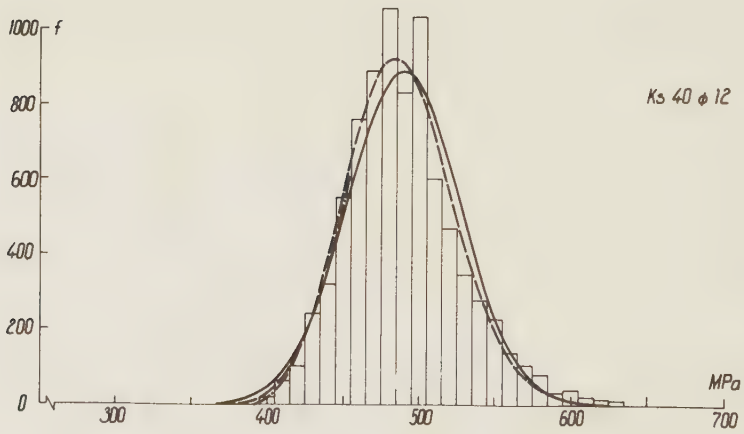
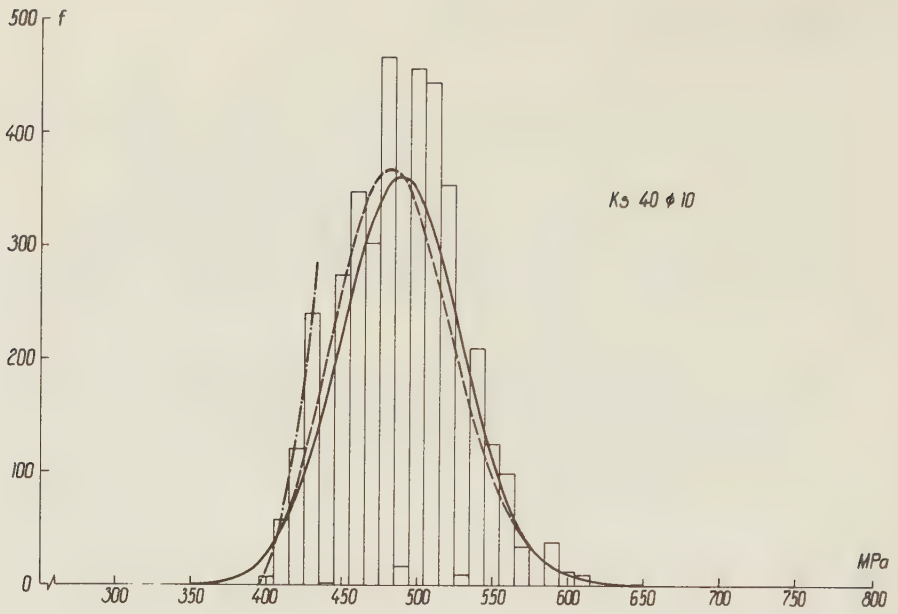


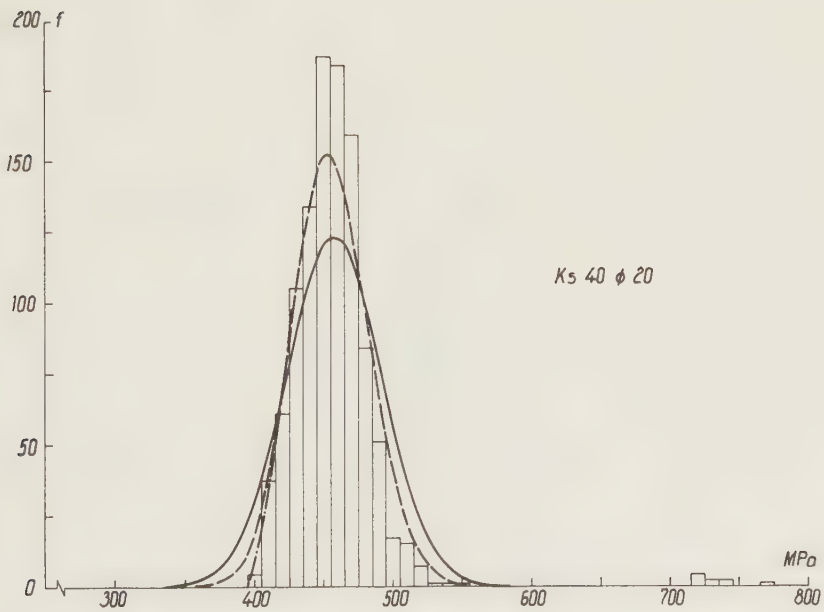
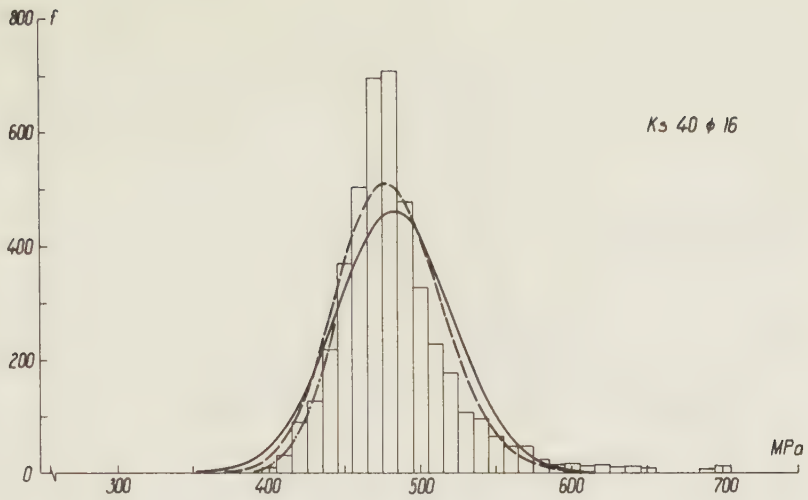
Sammanställning av armeringsdata

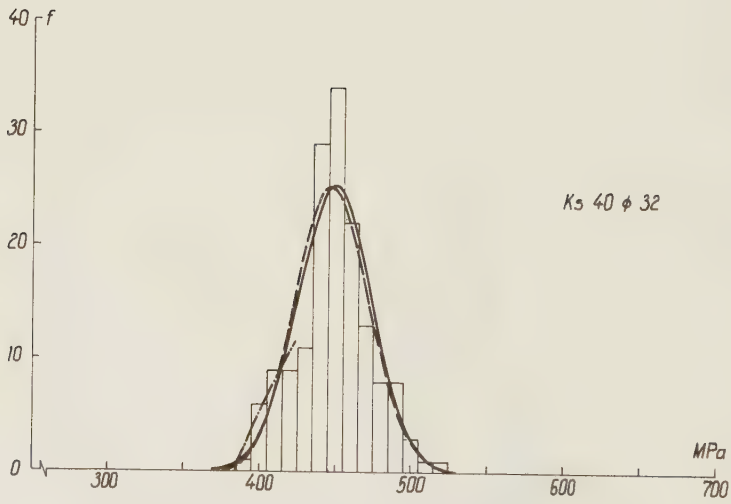
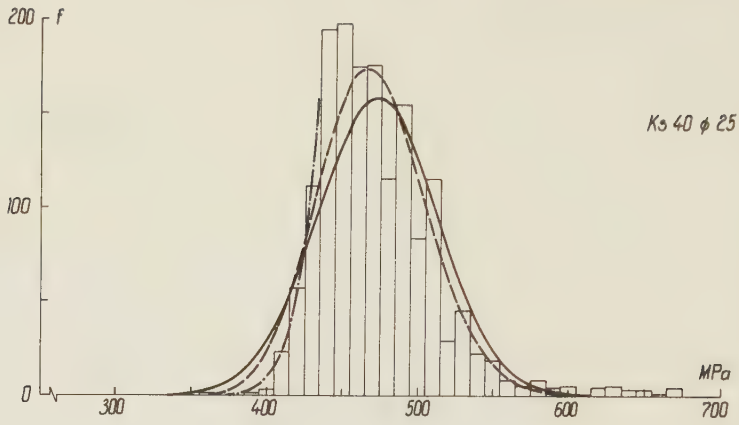
Data föreligger från löpande tillverkningskontroll vid några svenska stålverk samt från den stickprovskontroll som administreras av Svensk Byggstålkontroll. Vad provning från stålverken beträffar redovisas dessa med varje dimension för sig. För resultat från Svensk Byggstålkontroll gäller att varje kvalitet redovisas med alla dimensioner sammanslagna. Dessa diagram anges i bilagan med beteckningen " ϕ Alla".

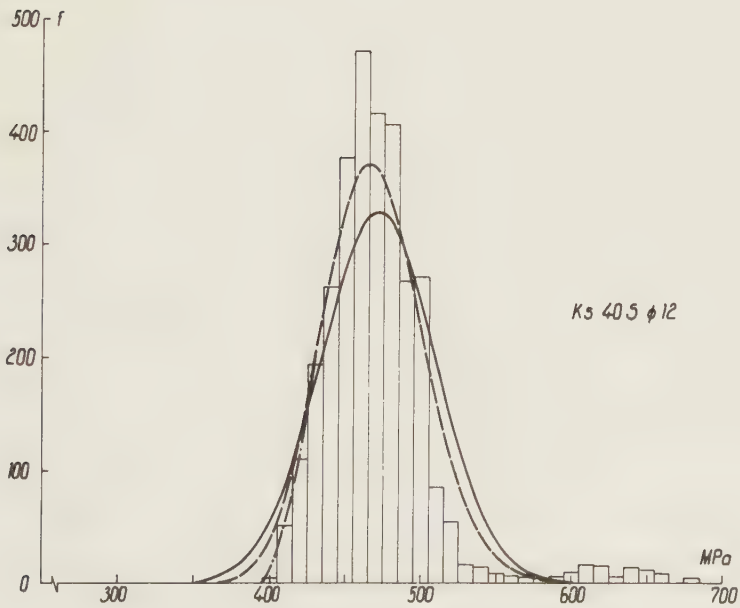
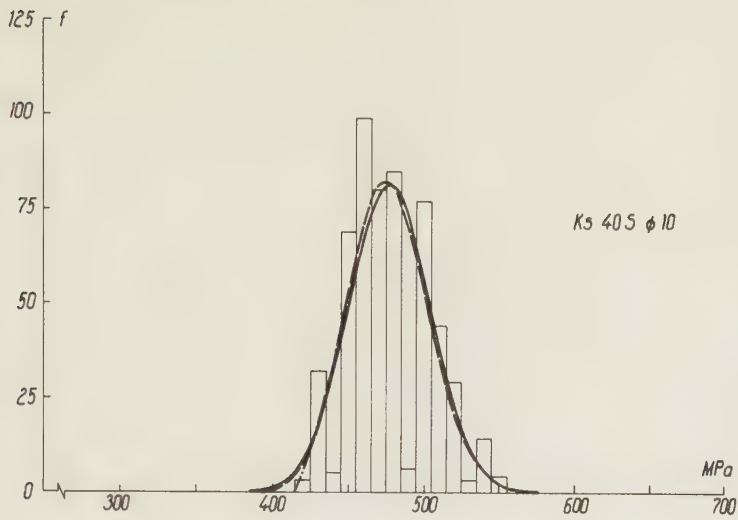
För samtliga histogram gäller att klassbredden är 10 MPa. Precis som för betongdata har tre fördelningstyper anpassats till materialet där kurvgrenarna betecknats enligt nedan.

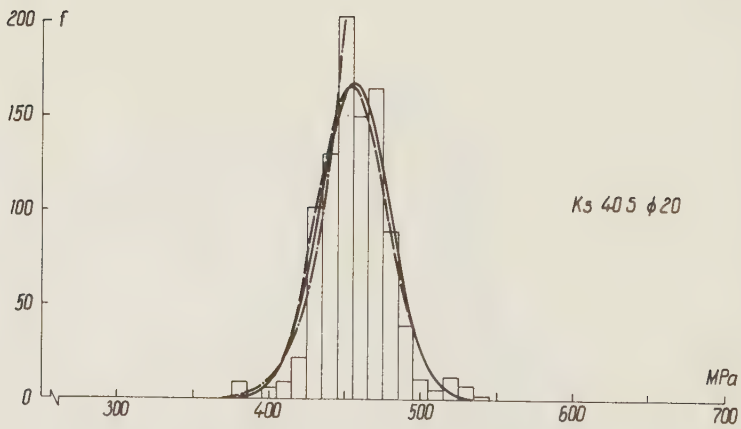
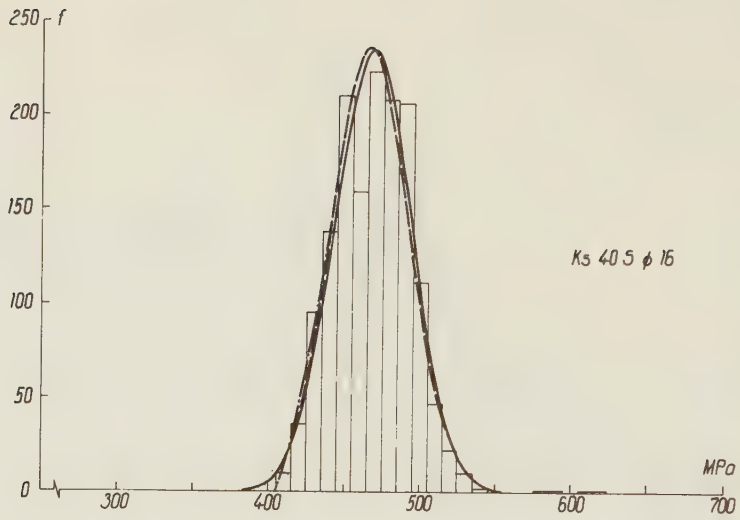
	Kurvbeteckning
Normalfördelning	_____
Lognormalfördelning	- - - - -
Potensfunktion (enligt 5.2.2)	- . - . - .

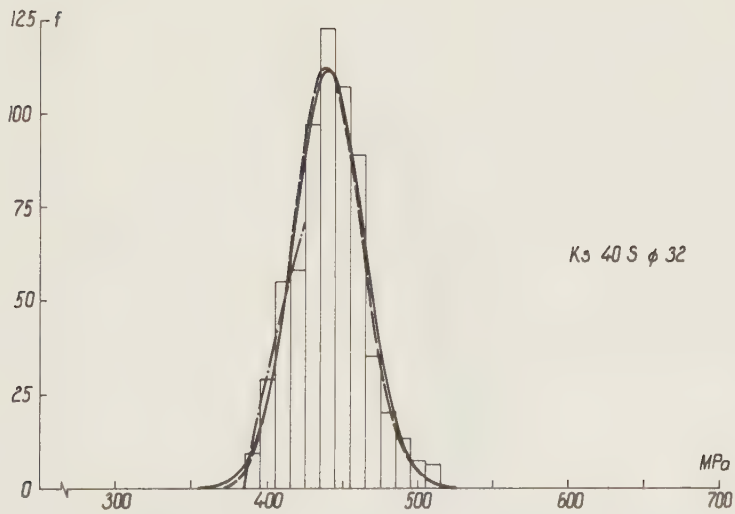
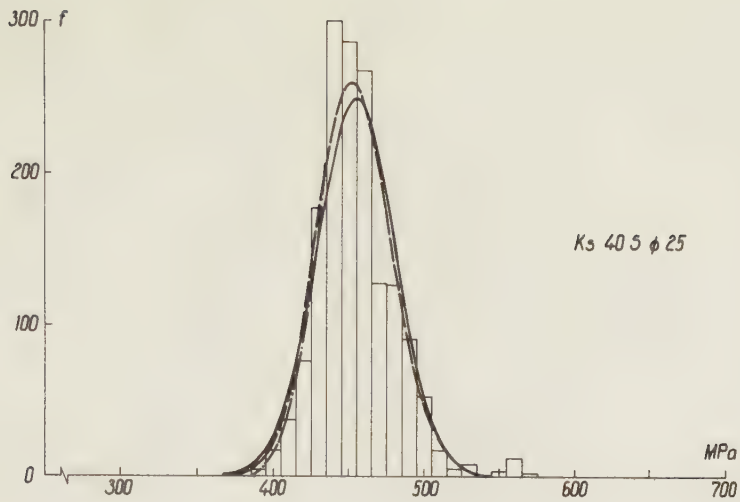


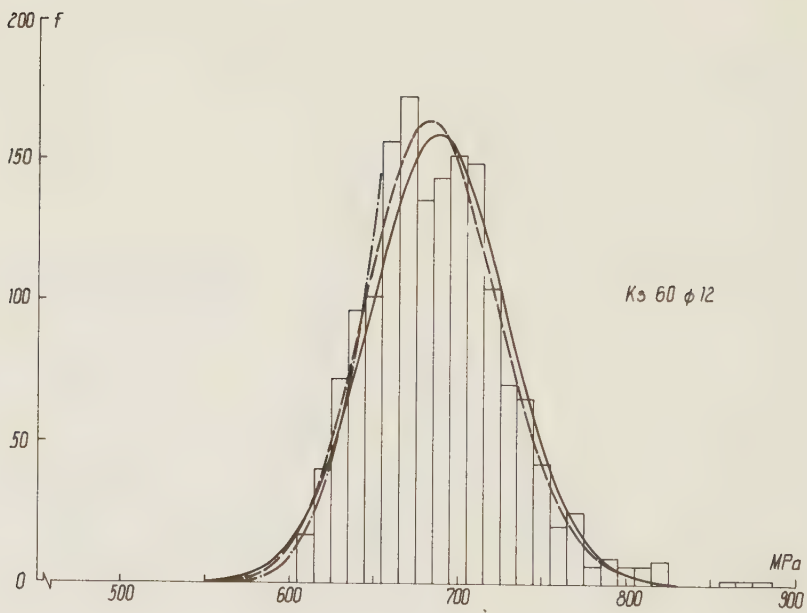
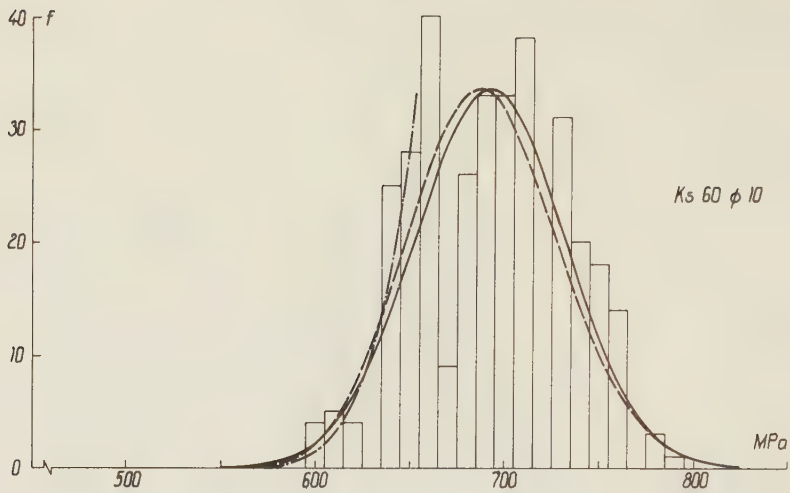


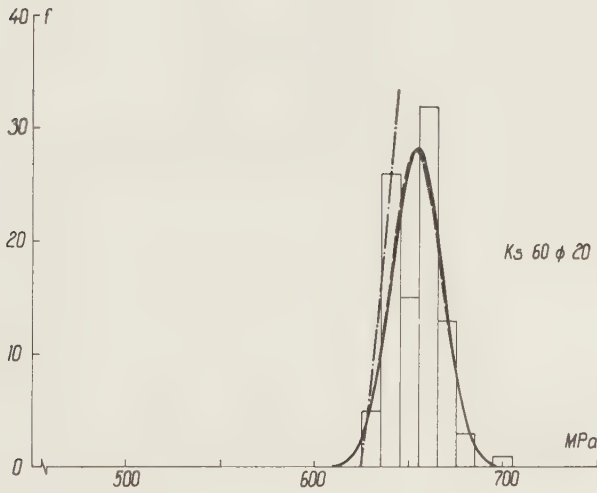
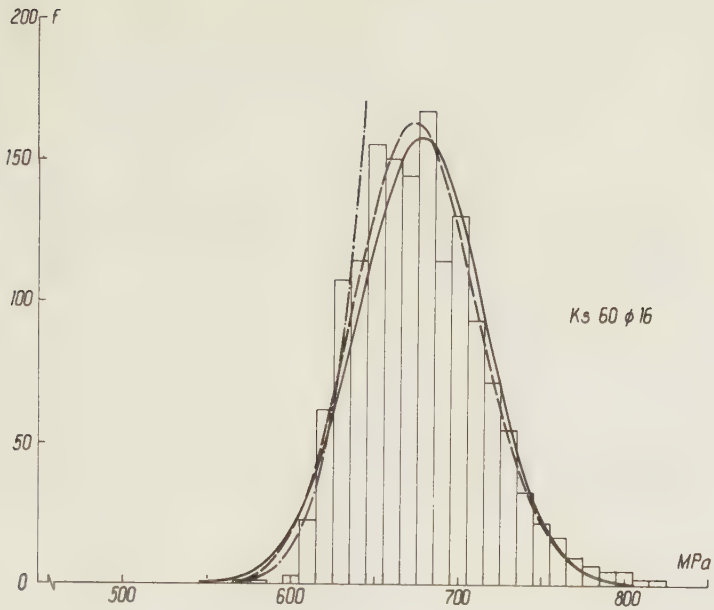




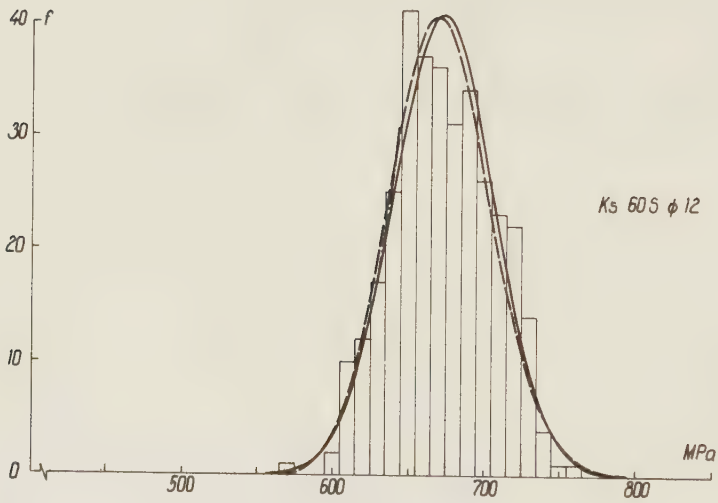
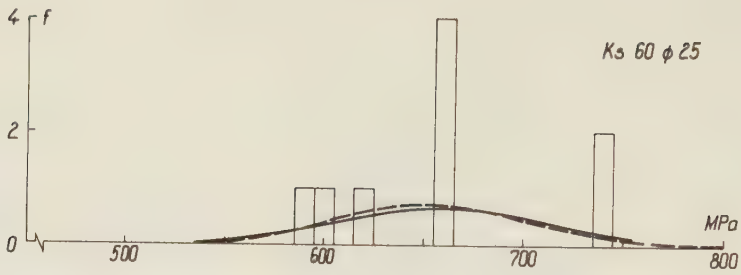


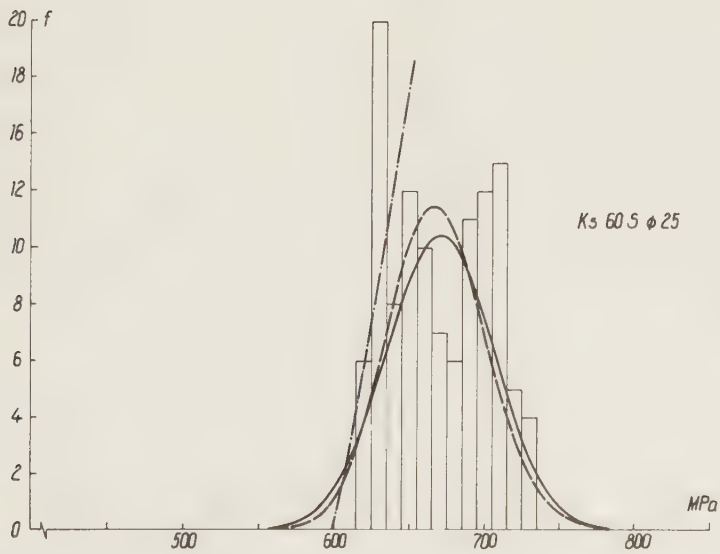
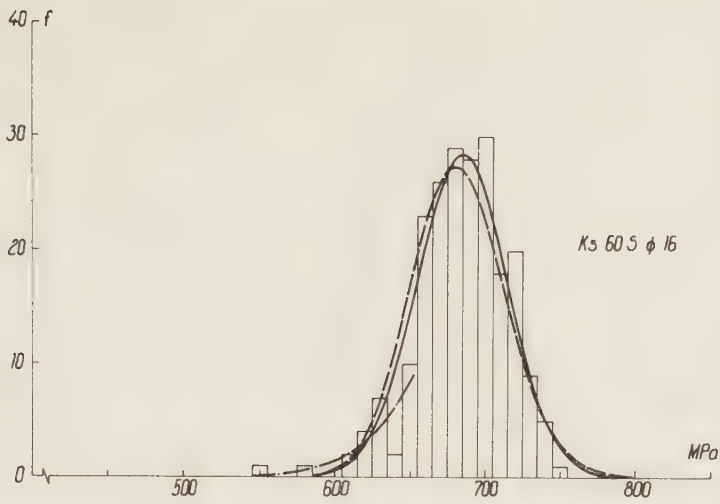


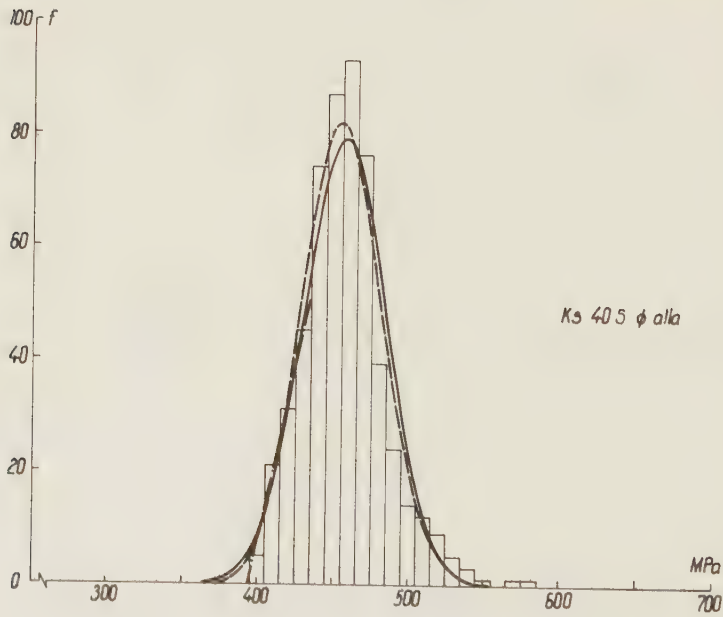
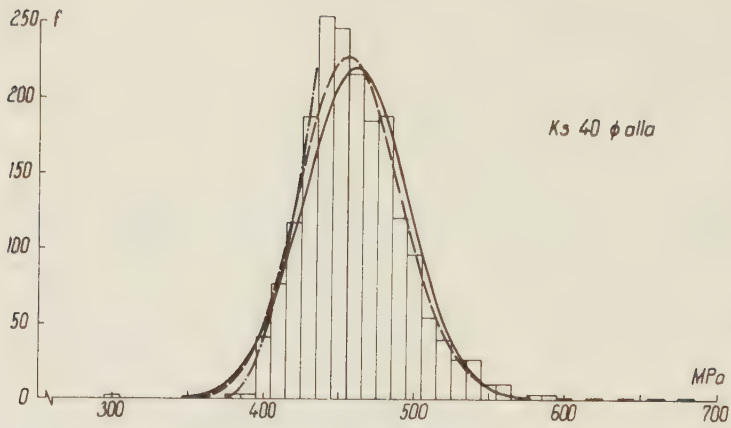


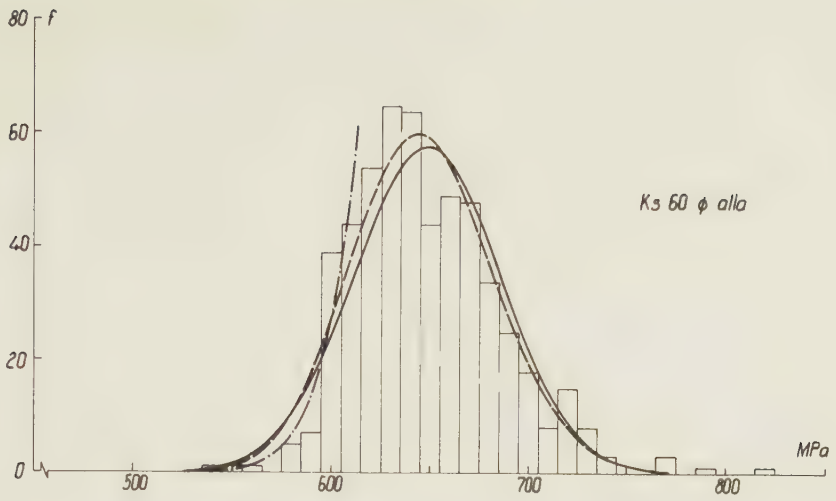


C10









Beräkningsexempel för kalibrering av partialkoefficienter

I beräkningsexemplet har två mått på skaderisk använts, dels

$$\beta_C = \frac{\bar{R} - \bar{G} - \bar{P}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_G^2 + \sigma_P^2}} \quad \text{Cornells } \beta \quad (D-1)$$

och dels

$$\beta_E = \frac{Ln \frac{\bar{R}}{\bar{G} + \bar{P}}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad \text{Estevas } \beta \quad (D-2)$$

Huvuddelen av beräkningarna har jag utfört i dator med utskrift i tabellform av γ_R för givna parametervärden på β , $\bar{G}$, γ_G och γ_P . Jämförelse mellan olika parametervärden och olika säkerhetsmått har därefter gjorts direkt ur de utskrivna tabellerna.

Fyra kombinationer av δ_G , δ_P och δ_R har undersökts.

- | | | | | | |
|---------------------|------------------|------------------|---------------------|------------------|------------------|
| 1. $\delta_R = 0.2$ | $\delta_G = 0.1$ | $\delta_P = 0.4$ | 3. $\delta_R = 0.2$ | $\delta_G = 0.1$ | $\delta_P = 0.2$ |
| 2. $\delta_R = 0.3$ | $\delta_G = 0.1$ | $\delta_P = 0.4$ | 4. $\delta_R = 0.2$ | $\delta_G = 0$ | $\delta_P = 0.4$ |

Beräkning av partialkoefficienter med Cornells β som mått:

Ingångsvärden:

$k = 1.65$ (5%-fraktilen för normalförd.)

$\beta_C = 3$ (mått på brottrisk)

$\bar{G} = 2$ (medelvärde på vilande last)

$P_k/G_k = 1, 1.5, 2, 2.5, 3$

Beräkningssteg:

För varje värde på P_k/G_k utförs i följd följande steg.

1. $\bar{P}$ beräknas ur givet $\bar{G}$ och P_k/G_k genom

$$\bar{P} = \bar{G} \cdot \frac{P_k}{G_k} \frac{(1+k\delta_G)}{(1+k\delta_P)} \quad (D-3)$$

2. $\bar{R}$ bestäms ur uttrycket

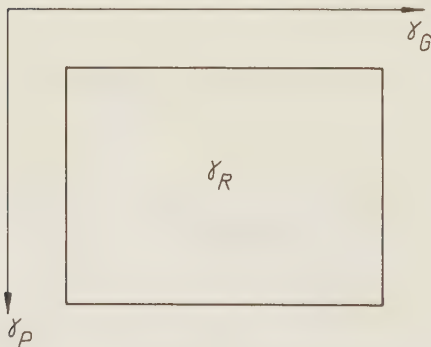
$$\beta = \frac{\bar{R} - \bar{G} - \bar{P}}{\sqrt{(\bar{R} \cdot \delta_R)^2 + (\bar{G} \cdot \delta_G)^2 + (\bar{P} \cdot \delta_P)^2}} \quad (D-4)$$

3. Med $\bar{G}$, $\bar{P}$ och $\bar{R}$ kända, beräknas G_k , P_k och R_k .

4. För olika kombinationer av γ_P och γ_G med värdena 0.8, 1, 1.2, 1.4, 1.6 beräknas γ_R ur

$$\gamma_R = \frac{R_k}{\gamma_G G_k + \gamma_P P_k} \quad (D-5)$$

Därefter skrives γ_R ut i tabell med utseende enligt nedan



Beräkning av partialkoefficienter med Estevas β som mått:

Ingångsdata:

$$k = 1.65$$

$$\beta_E = 3$$

Med bärformåga och last normalfördelade blir brottrisen 0.00135 med Cornells $\beta_C = 3$.

För Estevas β gäller approx att brottrisen = $460 \cdot e^{-4.3\beta_E}$. Med brottrisk enligt föregående = 0.00135 blir även Estevas $\beta_E = 3$ (2.96).

$$\bar{G} = 2$$

$$P_k/G_k = 1, 1.5, 2, 2.5, 3$$

Beräkningssteg:

1. $\bar{P}$ bestäms ur givna $\bar{G}$ och P_k/G_k genom

$$\bar{P} = \bar{G} \cdot \frac{P_k}{G_k} \frac{(1 + k \delta_G)}{(1 + k \delta_P)} \quad (D-6)$$

2. $\bar{R}$ bestäms ur

$$\bar{R} = (\bar{G} + \bar{P}) \cdot e^{\beta_E} \sqrt{\delta_R^2 + \frac{(\bar{G} \delta_G)^2 + (\bar{P} \delta_P)^2}{(\bar{G} + \bar{P})^2}} \quad (D-7)$$

eftersom

$$\theta = \frac{\bar{R}}{\bar{G} + \bar{P}}$$

och

$$\theta = e^{\beta_E} \sqrt{\delta_R^2 + \delta_S^2}$$

här är

$$\delta_S^2 = \frac{\sigma_S^2}{\bar{S}^2} = \frac{\sigma_G^2 + \sigma_P^2}{\bar{G} + \bar{P}}$$

R betecknar bärformåga

S betecknas last

3. Som tidigare kan nu G_k , P_k och R_k beräknas.
4. γ_R beräknas och skrives ut på samma sätt som tidigare.

Resultat:

Både Cornells och Estevas säkerhetsmått ger av kvoten P_k/G_k beroende värden på γ_R vid för övrigt konstanta parametervärden. Variationerna för γ_R är dock mindre än 10 % mellan två på varandra följande $\frac{P_k}{G_k}$ -värden. För vissa kombinationer av γ_G och γ_P kan man dock hitta ett värde på γ_R som är tillnärmelsevis oberoende av värdet på $\frac{P_k}{G_k}$. Läget av dessa konstanta värden bildar i den utskrivna tabellen räta linjer enligt nedanstående figur.

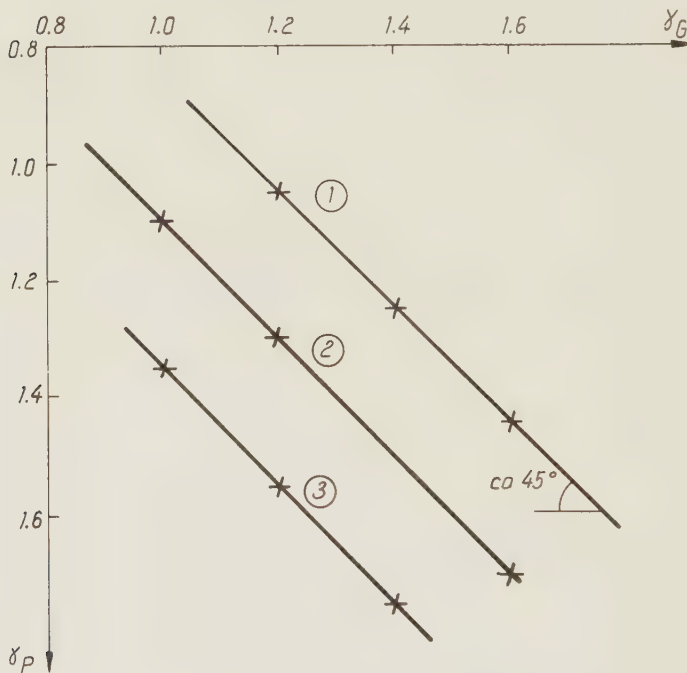


FIG D-1

Variationer i δ_G , δ_P och δ_R inverkar på linjens läge på följande sätt:

Cornells β :

$$\delta_R = 0.2 \quad \delta_G = 0.1 \quad \delta_P = 0.4$$

Linjens läge ungefär vid 2 i figuren.

δ_R ökar $\rightarrow$ linjen förskjutes mot läge 1

δ_P minskar $\rightarrow$ linjens läge oförändrad

δ_G minskar $\rightarrow$ linjen förskjutes mot läge 1

Estevas β :

$$\delta_R = 0.2 \quad \delta_G = 0.1 \quad \delta_P = 0.4$$

Linjens läge ungefär vid 3 i figuren.

δ_R ökar $\rightarrow$ linjen förskjuts mot läge 2

δ_P minskar $\rightarrow$ linjen förskjuts mot läge 1

δ_G minskar $\rightarrow$ linjen förskjuts mot läge 2

Variationen av γ_R för varierande värden på $x = \frac{P_k}{G_k}$ med för övrigt konstanta parametervärden illustreras av nedanstående beräkning

$$\gamma_G G_k + \gamma_P P_k = \frac{R_k}{\gamma_R} \quad (\text{grundekv}) \quad (D-8)$$

$$G_k \left(\gamma_G + \frac{P_k}{G_k} \gamma_P \right) = \frac{R_k}{\gamma_R} \rightarrow \gamma_R = \frac{R_k}{G_k (\gamma_G + x \gamma_P)}$$

med $x = \frac{P_k}{G_k}$

men $\frac{R_k}{G_k} = \frac{\bar{R} (1 - k \delta_R)}{\bar{G} (1 + k \delta_G)}$

och $\frac{\bar{R}}{\bar{G}}$

kan skrivas som

$$\theta(1 + \frac{\bar{P}}{\bar{G}}) = \theta(1 + x \frac{1 + k\delta_G}{1 + k\delta_P})$$

vilket ger

$$\gamma_R = (1 + x \frac{1 + k\delta_G}{1 + k\delta_P}) \frac{1 - k\delta_R}{1 + k\delta_G} \cdot \frac{1}{\gamma_G + x\gamma_P} \cdot \theta \quad (D-9)$$

$$\gamma_R = (\frac{1 - k\delta_R}{1 + k\delta_G} + x \cdot \frac{1 - k\delta_R}{1 + k\delta_P}) \cdot \frac{1}{\gamma_G + x\gamma_P} \cdot \theta \quad (D-10)$$

Vid givna värden på δ_G , δ_P , δ_R , γ_G och γ_P är $\gamma_R = f(x)$ av typ

$$\gamma_R = \frac{(C_1 + C_2 x)}{(C_3 + C_4 x)} \cdot \theta \quad (D-11)$$

Med θ enligt Estevas fås

$$\theta = e^{\beta \sqrt{\delta_R^2 + \frac{(\delta_G \bar{G})^2 + (\delta_P \bar{P})^2}{(\bar{G} + \bar{P})^2}}}$$

$$\theta = e^{\beta \sqrt{\delta_R^2 + \frac{\delta_G^2 + \delta_P^2 \cdot x^2 \frac{(1 + k\delta_G)^2}{(1 + k\delta_P)^2}}{(1 + x \frac{1 + k\delta_G}{1 + k\delta_P})^2}}}} \quad (D-12)$$

som är av formen

$$\theta = e^{\beta \sqrt{C_5 + \frac{C_6 + C_7 x^2}{1 + C_8 x}}} \quad (D-13)$$

Uttrycket för γ_R blir således:

$$\gamma_R = (1+\gamma) \frac{1-k\delta_R}{1+k\delta_G} \cdot e^{\beta \sqrt{\delta_R^2 + \frac{\delta_G^2 + \delta_P^2 \gamma^2}{(1+\gamma)^2}}} \cdot \frac{1}{\gamma_G + \gamma_P \gamma \frac{1+k\delta_P}{1+k\delta_G}}$$

med

(D-14)

$$\gamma = x \cdot \frac{1+k\delta_G}{1+k\delta_P}$$

Efter hyfsning fås

$$\gamma_R = (1+\gamma) \frac{1-k\delta_R}{1+k\delta_G} \cdot e^{\beta \sqrt{\frac{(\delta_R^2 + \delta_P^2)(\gamma^2 + \frac{\delta_R^2}{\delta_R^2 + \delta_P^2} \cdot 2\gamma + \frac{\delta_R^2 + \delta_G^2}{\delta_R^2 + \delta_P^2})}{(1+\gamma)^2}}} \cdot \frac{1}{\gamma_G (1 + \frac{\gamma_P}{\gamma_G} \frac{1+k\delta_P}{1+k\delta_G} \cdot \gamma)}$$

(D-15)

Villkoret att γ_R konstant för alla $x = \frac{p_k}{G_k}$ uppfylls endast om

$$\frac{\gamma_P}{\gamma_G} \frac{1+k\delta_P}{1+k\delta_P} = 1$$

samt

$$\frac{\delta_R^2}{\delta_R^2 + \delta_P^2} = 1$$

och

$$\frac{\delta_R^2 + \delta_G^2}{\delta_R^2 + \delta_P^2} = 1$$

Detta kräver att $\delta_P^2 = 0$, $\delta_G^2 = 0$ vilket är en för praktisk tillämpning ointressant lösning. Beräkningarna har dock visat att man kan vinna ett γ_R som är tillnärmelsevis konstant för varierande värden på kvoten $\frac{p_k}{G_k}$.

I nedanstående sammanställningar är γ_G , γ_P och γ_R tabellerade för olika värden på δ_G , δ_P och δ_R . Framräkningen av tabellvärdena har skett genom interpolation mellan värden i datorutskriften med villkoret att γ_R skall vara tillnärmelsevis konstant och oberoende av kvoten $\frac{P_k}{G_k}$.

Cornells β $\delta_R = 0.2$ $\delta_G = 0.1$ $\delta_P = 0.4$

γ_G	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
γ_P	-	0.950	1.143	1.320	1.517
γ_R	-	1.359	1.130	0.973	0.849

Cornells β $\delta_R = 0.3$ $\delta_G = 0.1$ $\delta_P = 0.4$

γ_G	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
γ_P	-	-	0.911	1.005	1.2
γ_R	-	-	3.464	2.974	2.608

Cornells β $\delta_R = 0.2$ $\delta_G = 0.1$ $\delta_P = 0.2$

γ_G	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
γ_P	-	0.959	1.142	1.338	1.517
γ_R	-	1.422	1.189	0.995	0.893

Cornells β $\delta_R = 0.2$ $\delta_G = 0$ $\delta_P = 0.4$

γ_G	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
γ_P	-	0.802	0.987	1.152	1.320
γ_R	-	1.561	1.301	1.116	0.975

Estevas β $\delta_R = 0.2$ $\delta_G = 0.1$ $\delta_P = 0.4$

γ_G	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
γ_P	1.20	1.409	-	-	-
γ_R	1.088	0.876	-	-	-

Estevas β $\delta_R = 0.3$ $\delta_G = 0.1$ $\delta_P = 0.1$

γ_G	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
γ_P	1.00	1.207	1.511	-	-
γ_R	1.166	0.926	0.776	-	-

Estevas β $\delta_R = 0.2$ $\delta_G = 0.1$ $\delta_P = 0.2$

γ_G	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
γ_P	0.807	1.095	1.300	1.520	-
γ_R	1.277	1.022	0.856	0.732	-

Estevas β $\delta_R = 0.2$ $\delta_G = 0$ $\delta_P = 0.4$

γ_G	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
γ_P	1.005	1.307	1.564	-	-
γ_R	1.233	0.990	0.865	-	-

Då variationskoefficienterna ändras, ändras även värdet på γ_R .
Nedanstående tabeller visar ändringen av γ_R i procent då variationskoefficienterna ändras enligt nedan.

Cornells β

Variationskoefficienter		Ändring (ökning) av γ_R för konstanta γ_G, γ_P
Konstanta	Varierande	
$\delta_G = 0.1$	$\delta_R = 0.2 \rightarrow 0.3$	276 %
$\delta_P = 0.4$		
$\delta_R = 0.2$	$\delta_P = 0.4 \rightarrow 0.2$	5 %
$\delta_G = 0.1$		
$\delta_R = 0.2$	$\delta_G = 0 \rightarrow 0.1$	7 %
$\delta_P = 0.4$		

Estevas β

Variationskoefficienter		Ändring (ökning) av
Konstanta	Varierande	γ_R för konstanta γ_G, γ_P
$\delta_G = 0.1$ $\delta_P = 0.4$	$\delta_R = 0.2 \rightarrow 0.3$	4 %
$\delta_R = 0.2$ $\delta_G = 0.1$	$\delta_P = 0.4 \rightarrow 0.2$	2 %
$\delta_R = 0.2$ $\delta_P = 0.4$	$\delta_G = 0 \rightarrow 0.1$	4 %

Exemplet visar att inget av de båda säkerhetssystemen uppfyller kraven exakt men bägge gäller approximativt.

Beträffande kravet att partialkoefficienterna endast skall påverkas av respektive variationskoefficienter så uppfylls detta bäst av Estevas system där ändringen av partialkoefficienter hörande till icke berörda variationskoefficienter är minst. En stor nackdel för Cornells system i detta avseende är den asymptot som utbildas då $\beta^2 \delta_R^2 \rightarrow 1$. Detta avspeglas i kraftigt förändrade värden på partialkoefficienterna då δ_R ändrades från 0.2 till 0.3 i beräkningen.

Inverkan av nivån hos last och bärförmåga är i stort sett lika stor för Cornells som Estevas system, dvs man kan finna ett γ_R som endast ändras någon procent då kvoten

$\frac{P_k}{G_k}$ ändras (för praktisk tillämpning ointressanta värden på $\frac{P_k}{G_k}$ beaktas ej) och övriga parametrar hålls konstanta.

Teori för test av låga värden på kubhållfasthet hos betong.

Somliga av erhållna data för kubhållfasthet hos betong uppvisar en tendens att inte tillhöra den population som avsetts att undersökas. I detta fall gäller det speciellt extremt låga värden på kubhållfastheten som misstänks vara orsakade av t ex felmärkning eller förväxling av kuber.

Betecknas kubhållfasthetens seriemedelvärden med den stokastiska variabeln X och väljs ett tal u så beskaffat att

$$P(X_{(1)} \leq u) = \alpha \quad (E-1)$$

där $X_{(1)}$ är det lägst observerade värdet av variabeln X och α är vald sannolikhet

så kan värden understigande värdet på u förkastas på nivån α .

Skrives fördelningsfunktionen för X som $F_X(x)$ och betecknas antalet stickprov ur fördelningen med n erhålles

$$P(X_{(1)} \leq u) = 1 - P(\text{alla } X > u) = 1 - (1 - F_X(u))^n = 1 - (1 - \varepsilon)^n \quad (E-2)$$

Göres nu antagandet att $F_X(x)$ är en normalfördelning fås

$$\varepsilon = F(u) = \Phi\left(\frac{u - \bar{X}}{\sigma_X}\right) \quad (E-3)$$

vilket ger

$$u = -\sigma_X \lambda_\varepsilon + \bar{X} \quad (E-4)$$

Väljes signifikansnivån α till 5% kan undre gränsen u beräknas för varje betongkvalitet sedan ε lösts ur EKV (E-1) och (E-2). TAB E-1 visar en sammanställning över dylika undre gränser under vilka stickprov sannolikt ej bör finnas.

TAB E.1. Sammanställning över undre gränsvärden.

Hållfasthetsklass	Antal serier	Undre gränsen u (MPa)
K150	5267	3.71
K200	18187	9.50
K250	100503	12.76
K300	32278	17.28
K300 V	28118	18.24
K350	20626	22.37
K400	63885	24.95
K450	4147	35.43
K500	15479	37.32
K550	225	50.57
K600	3709	48.69

Samband mellan säkerhetsindex β och centrala säkerhetsfaktorn θ vid trunkerade fördelningar

I diagramform redovisas inverkan av trunkering på säkerhetsindex β för olika kombinationer av parametervärden.

Last- och bärförmågevariablerna förutsättes bägge vara oberoende och normalfördelade samt symmetriskt trunkerade vid n standardavvikelser från medelvärdet.

Valda kombinationer av parametrar är

$$\alpha = \frac{\bar{P}}{\bar{G}} = 0.2 - 1 \quad \text{i steg om } 0.2$$

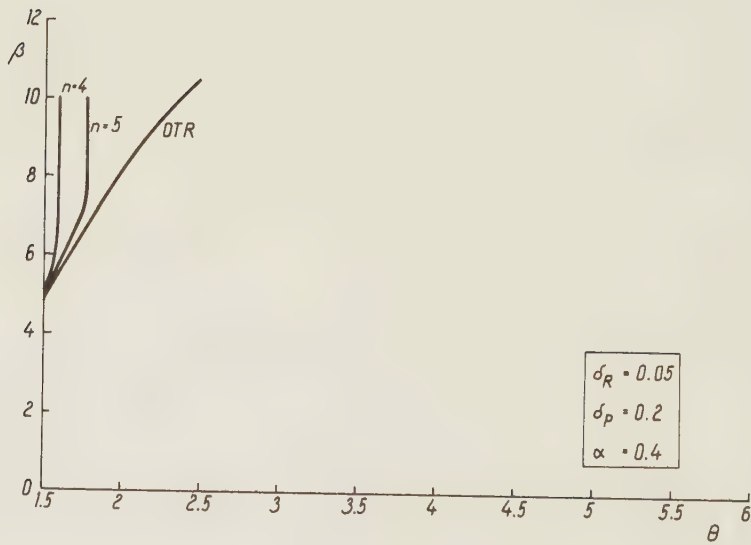
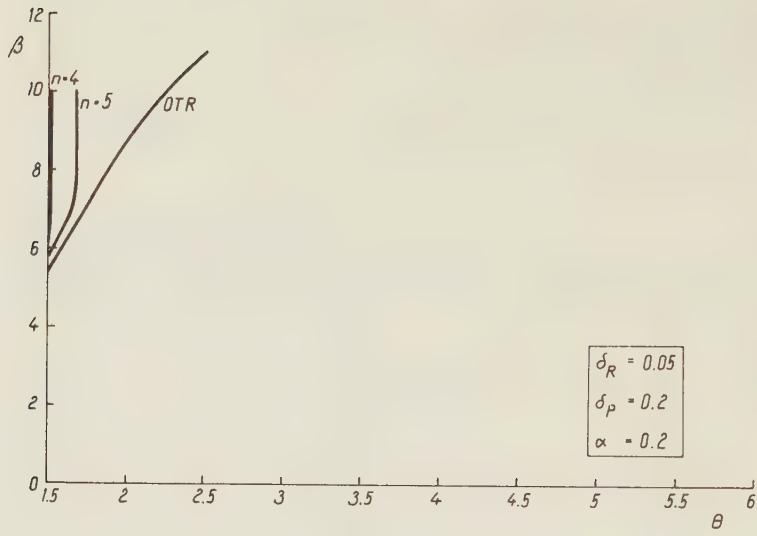
$$\alpha = 1 - 6 \quad \text{i steg om } 1$$

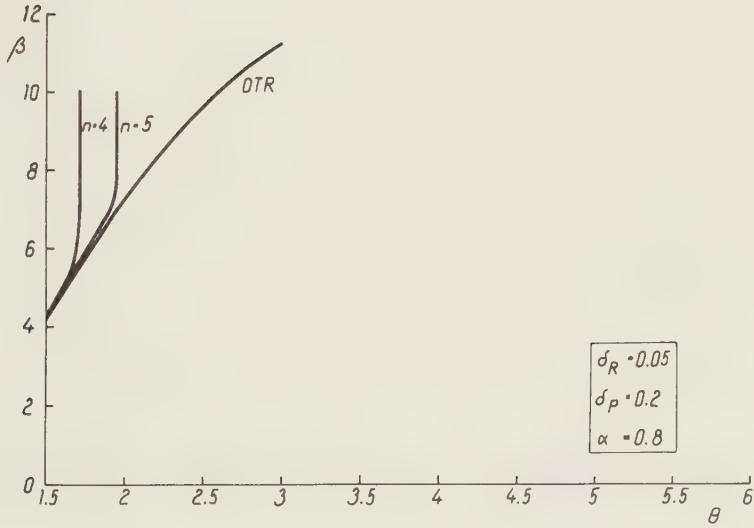
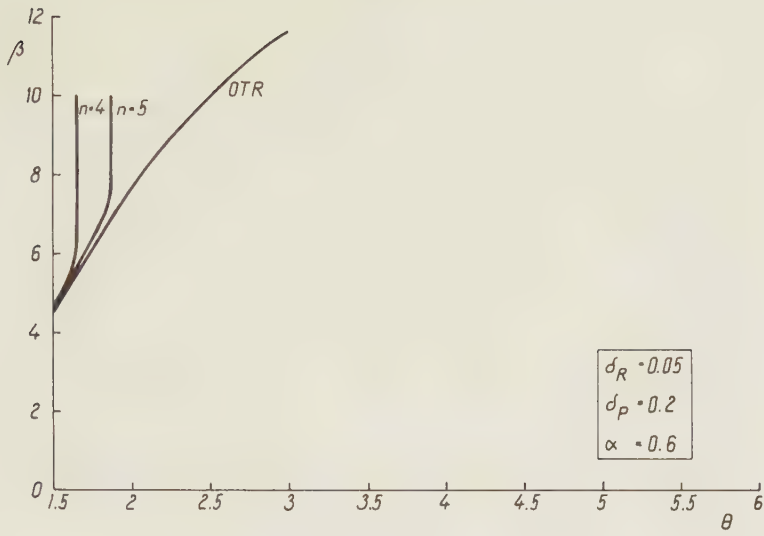
$$\delta_G = 0.05$$

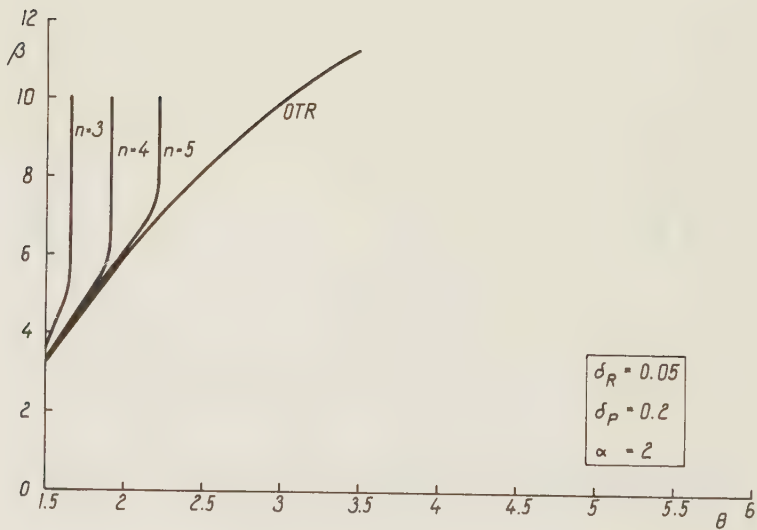
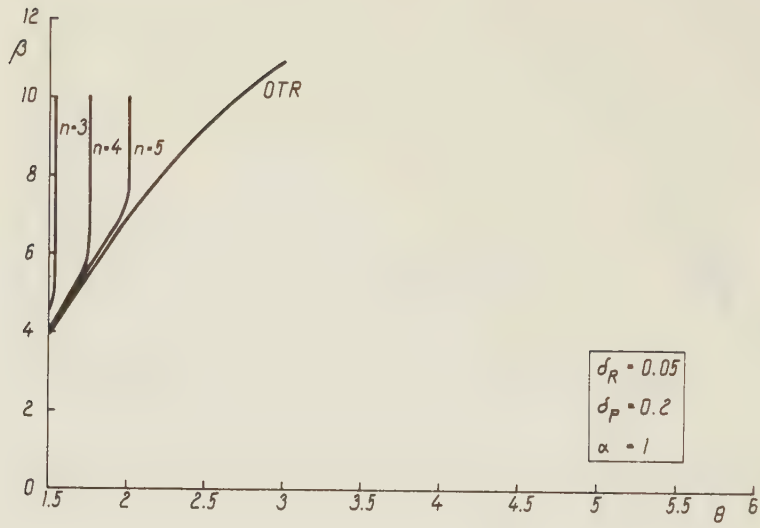
$$\delta_P = 0.2 - 0.4 \quad \text{i steg om } 0.1$$

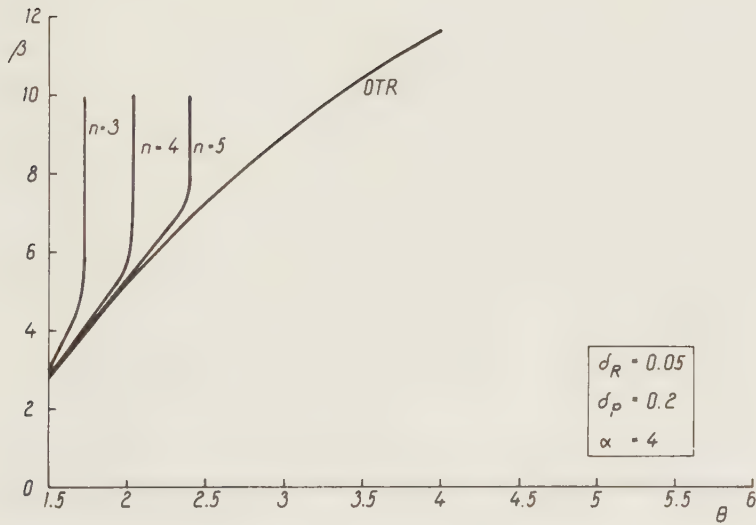
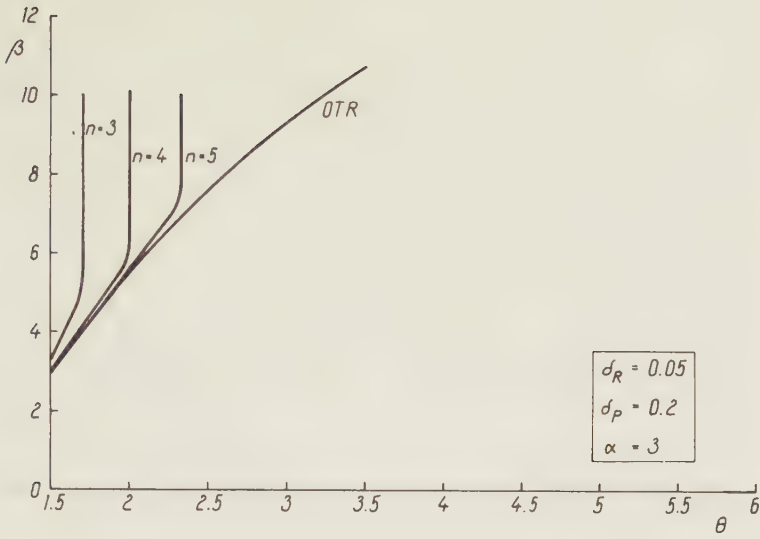
$$\delta_R = 0.05 - 0.2 \quad \text{i steg om } 0.05$$

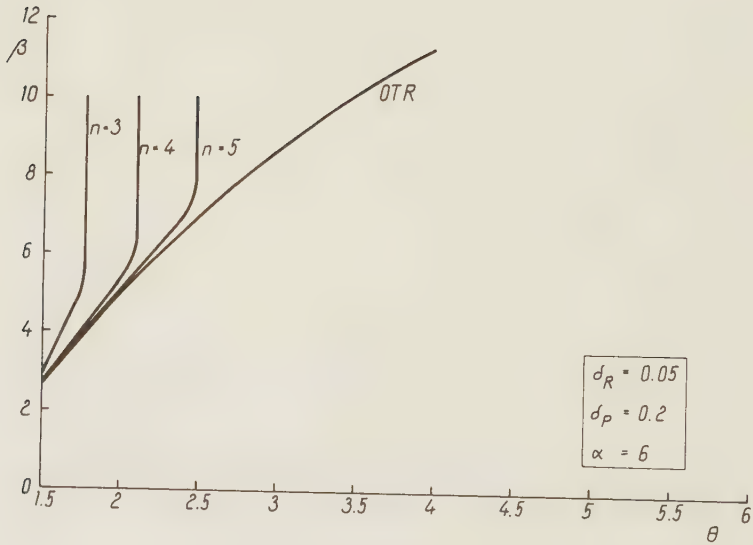
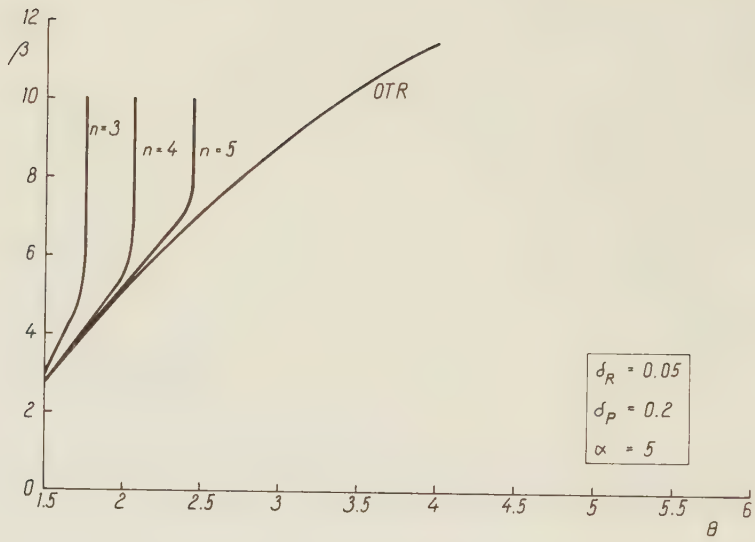
$$n = 3, 4, 5 \quad \text{i steg om } 1$$

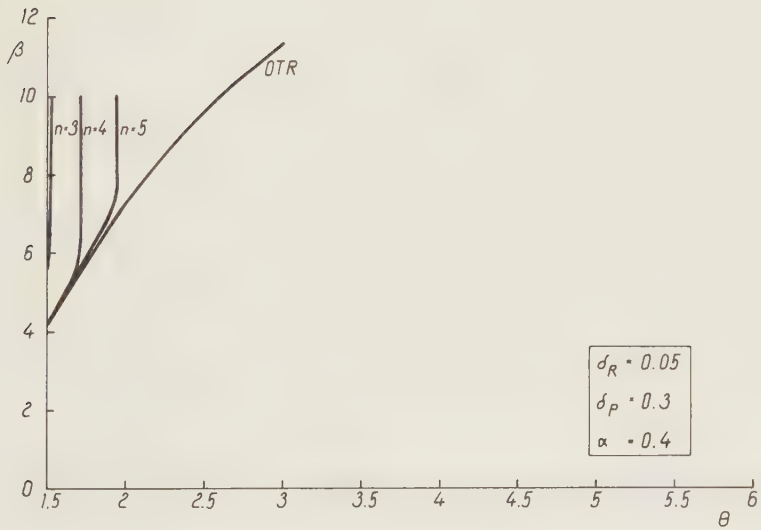
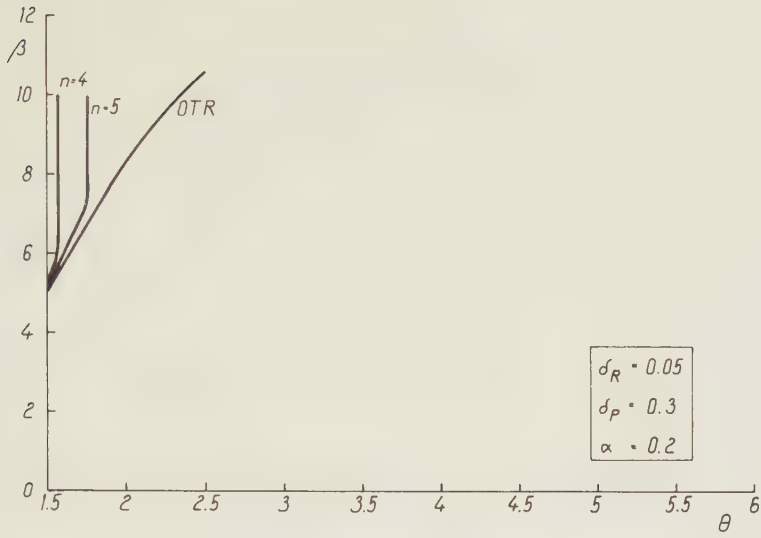


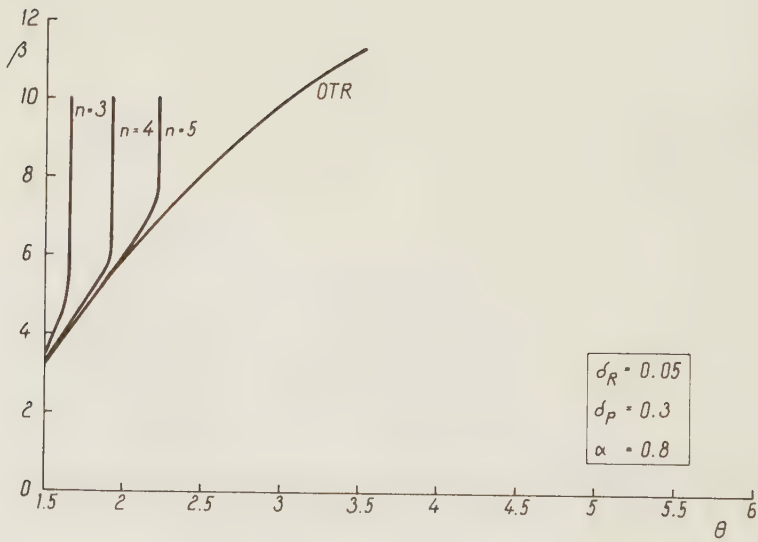
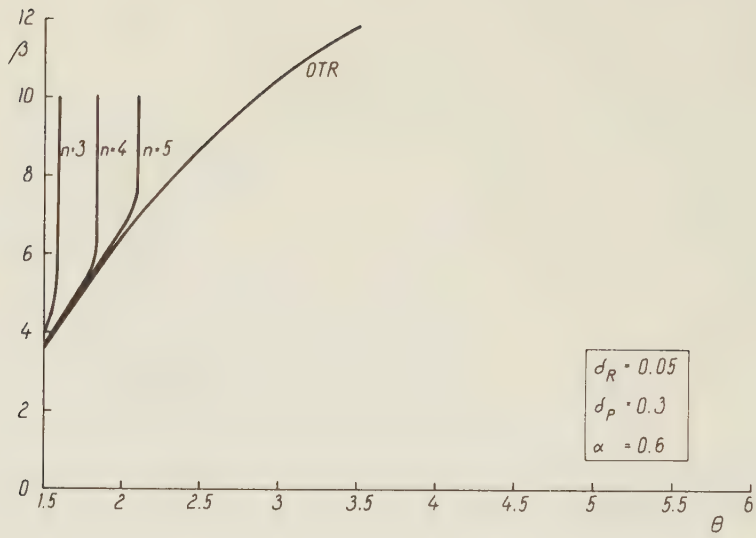


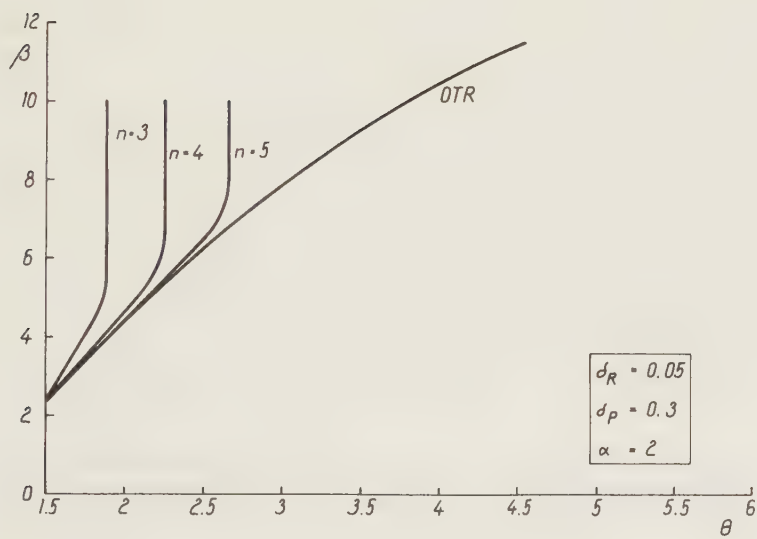
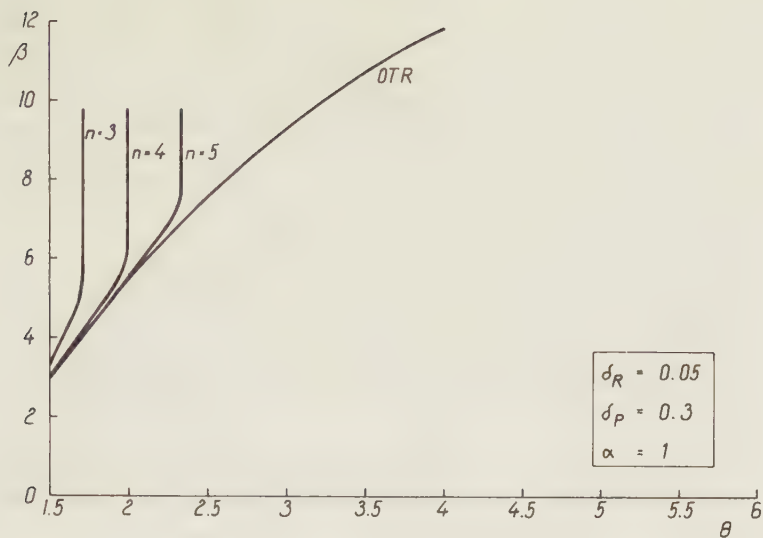


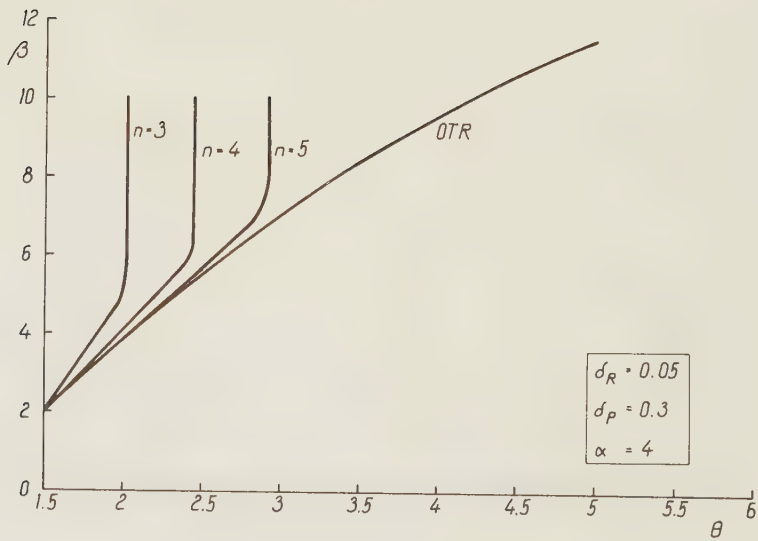
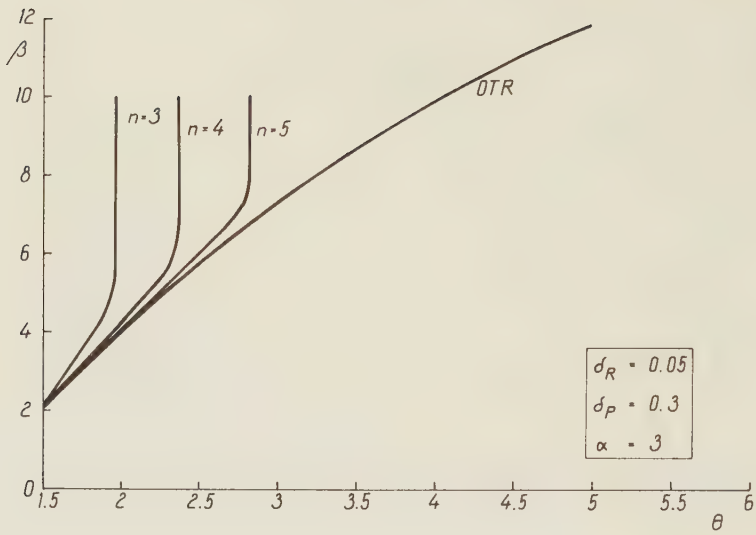


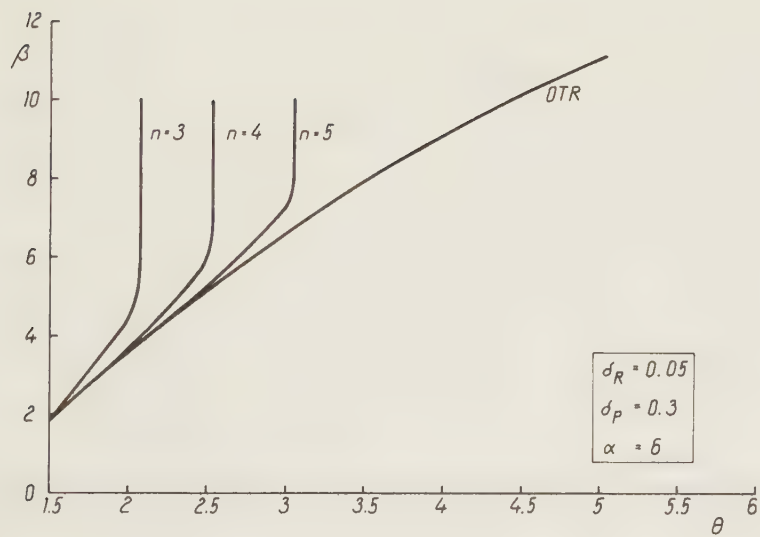
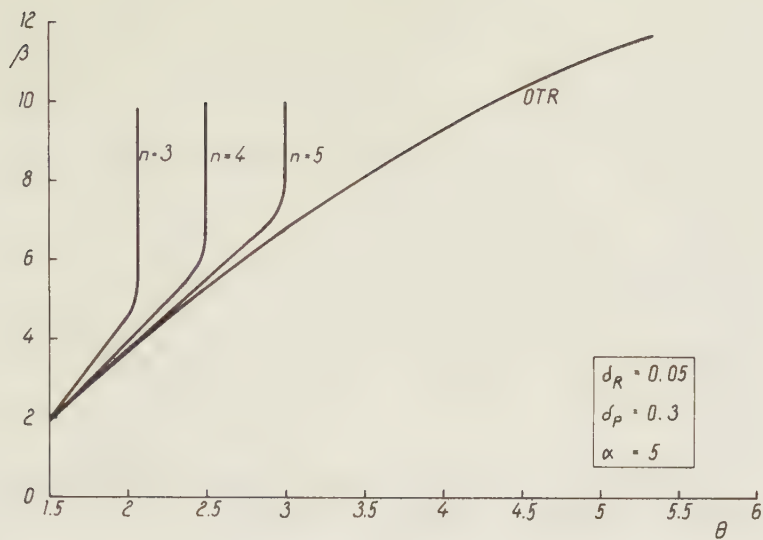


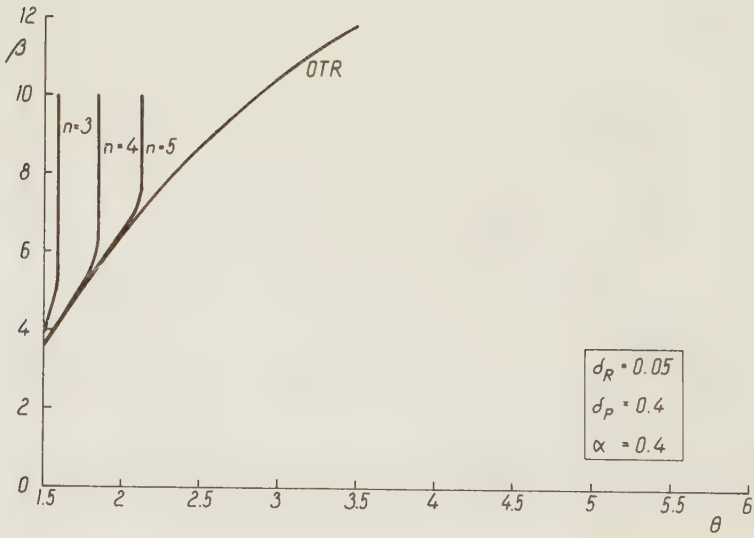
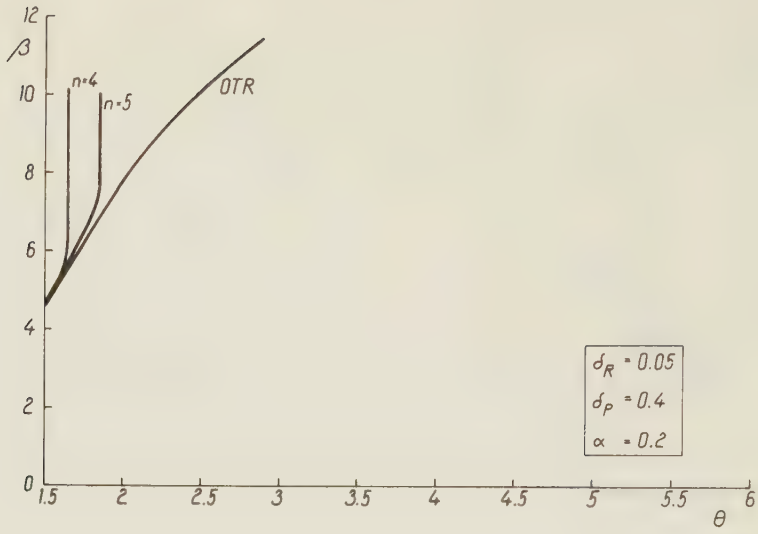


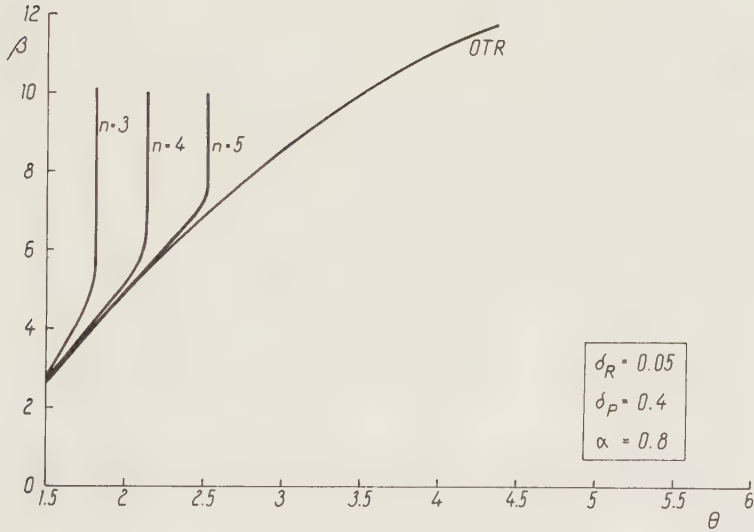
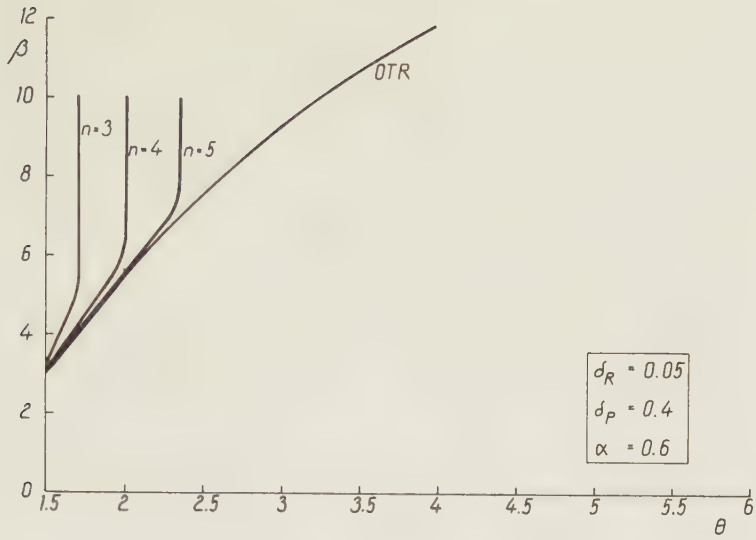


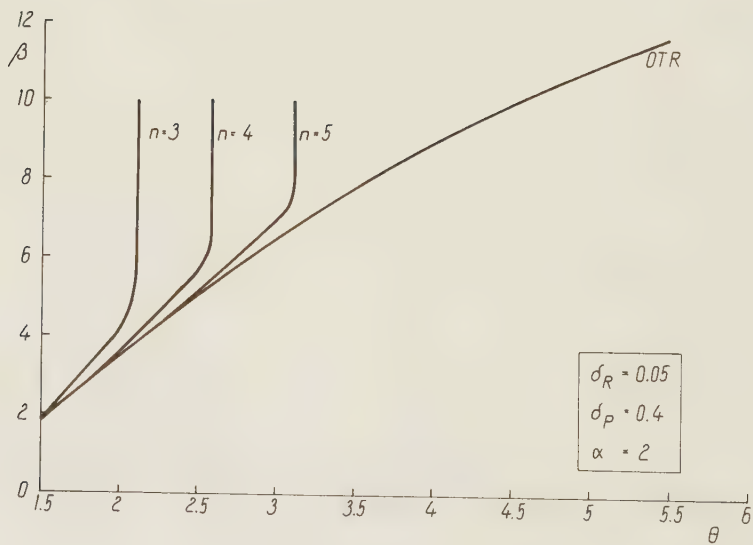
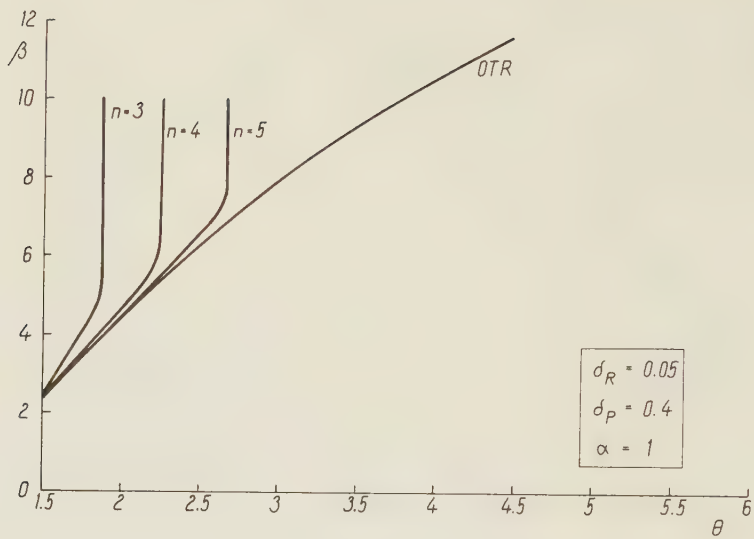


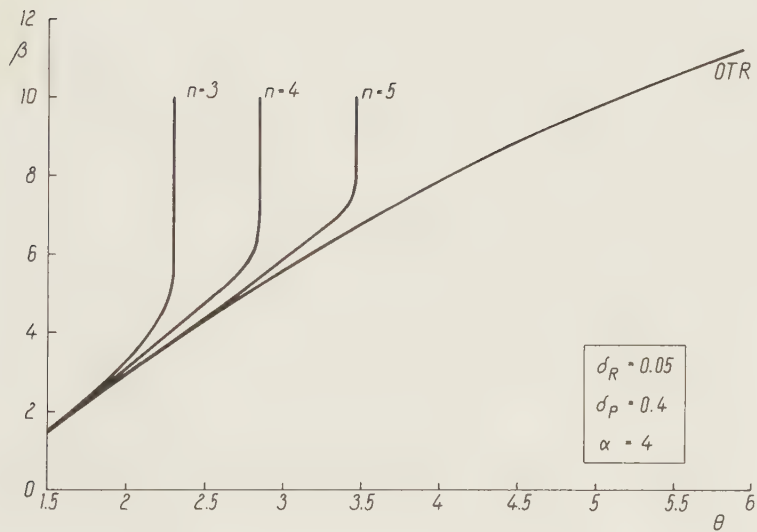
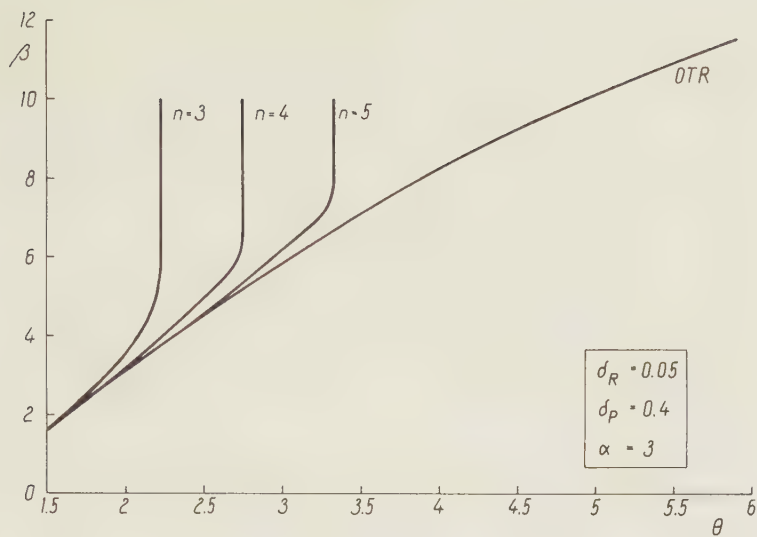


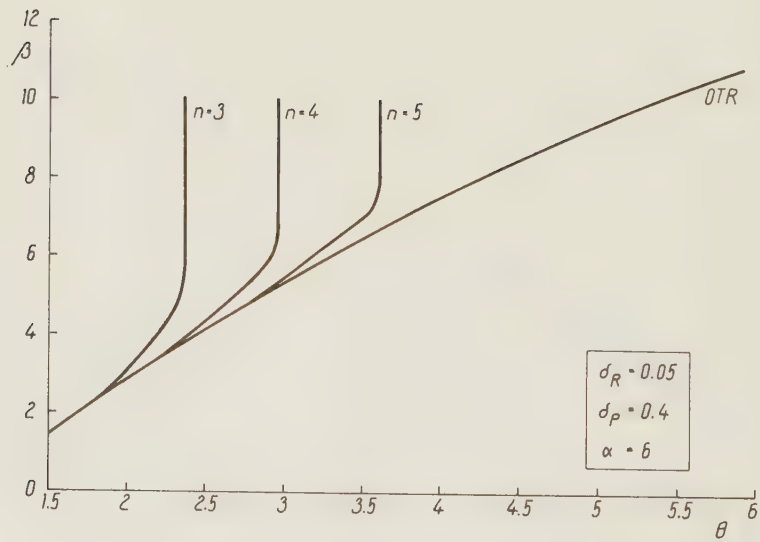
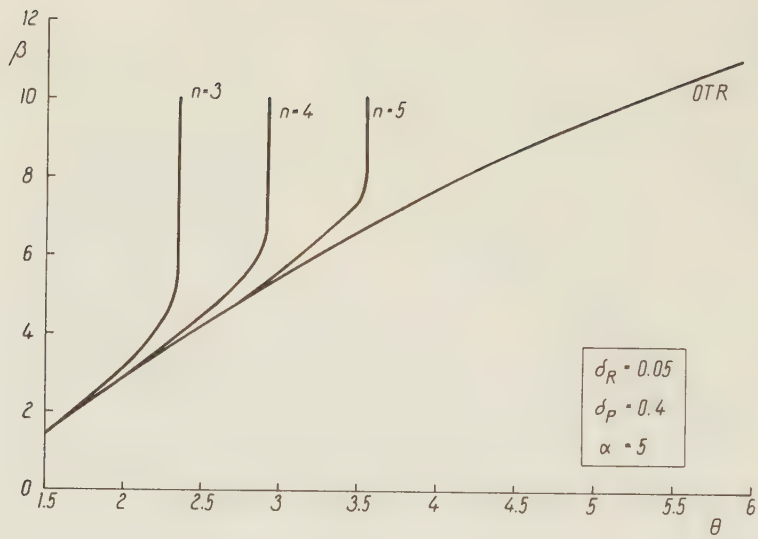


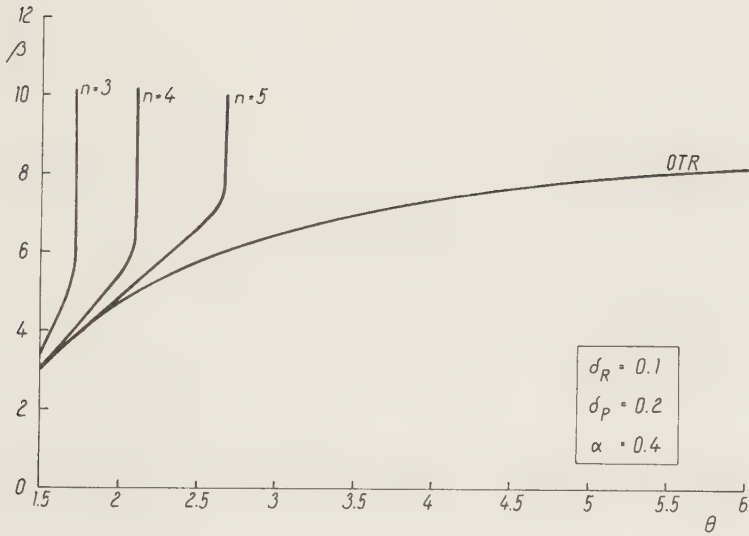
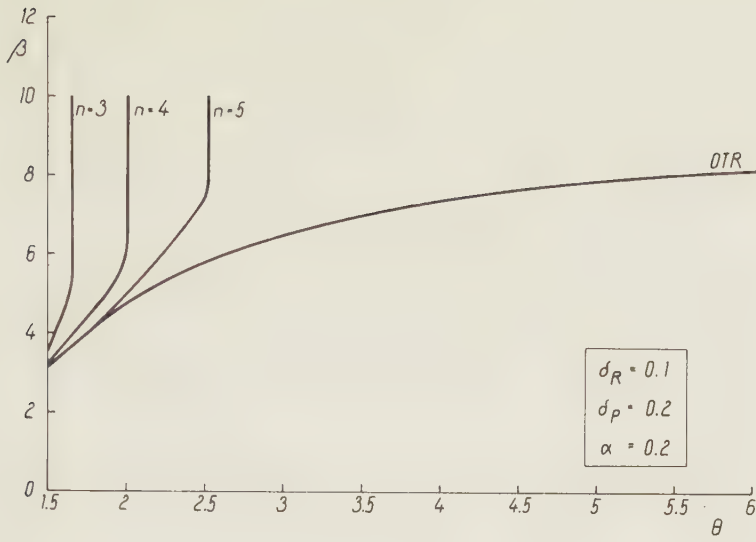


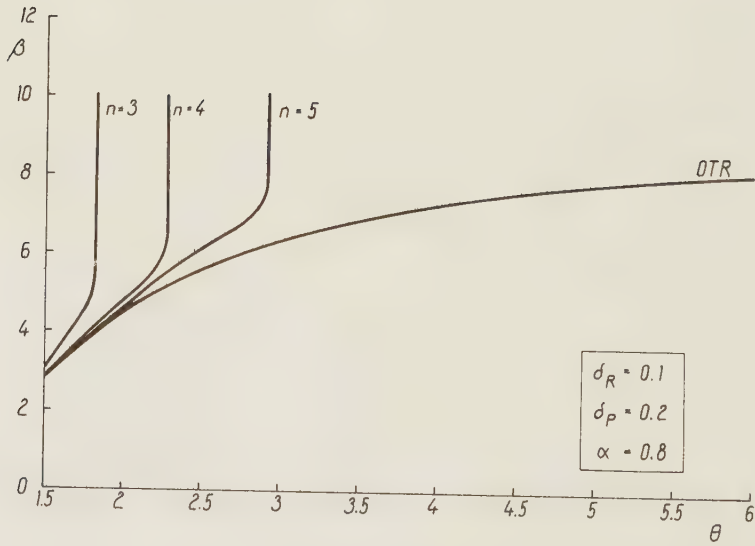
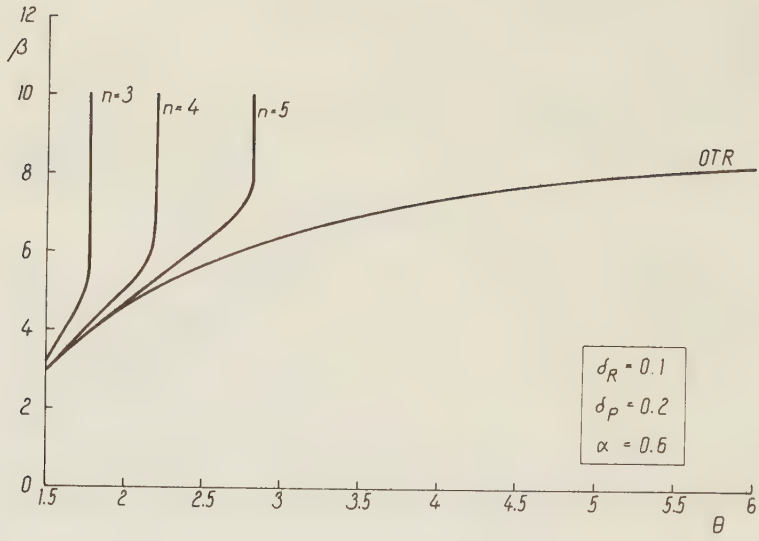


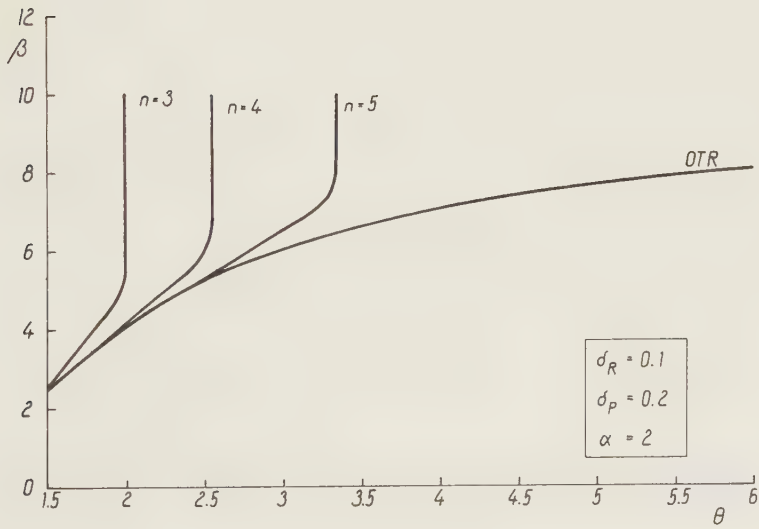
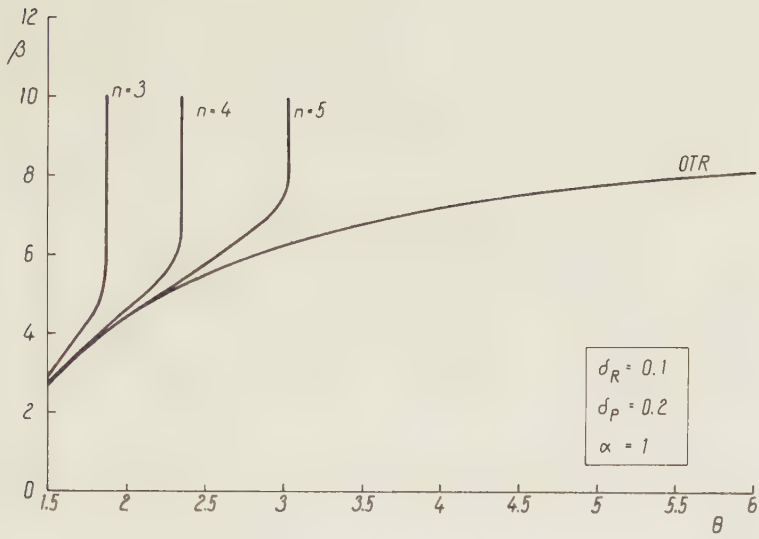


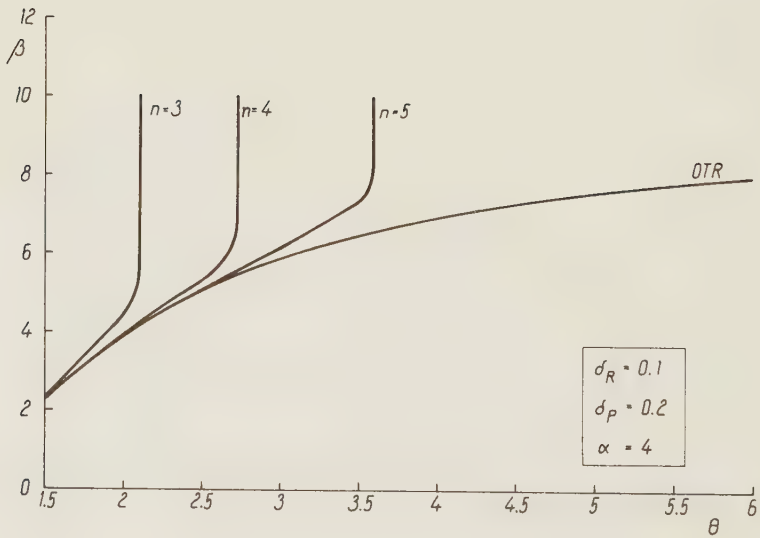
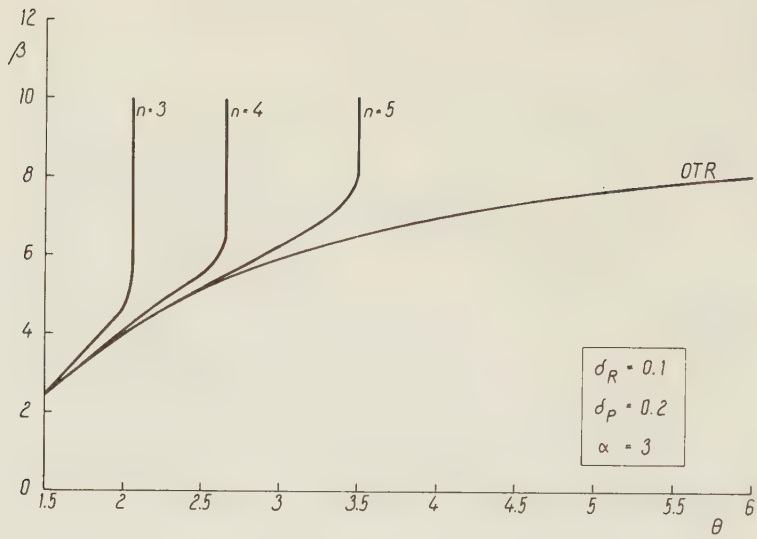


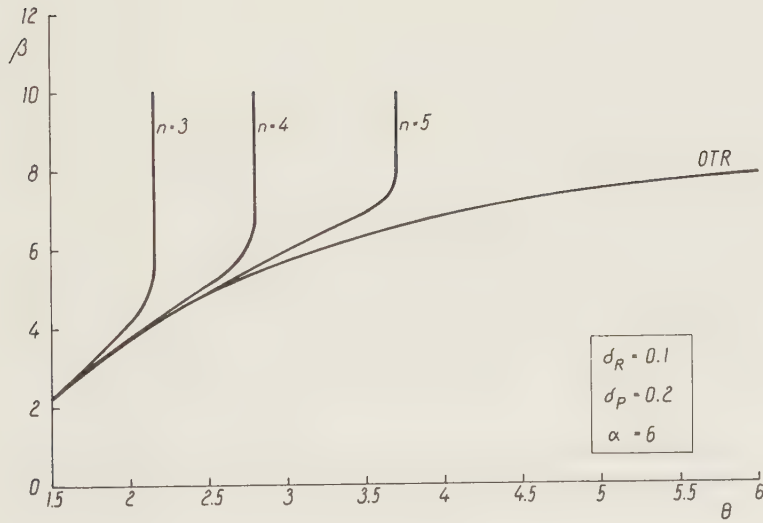
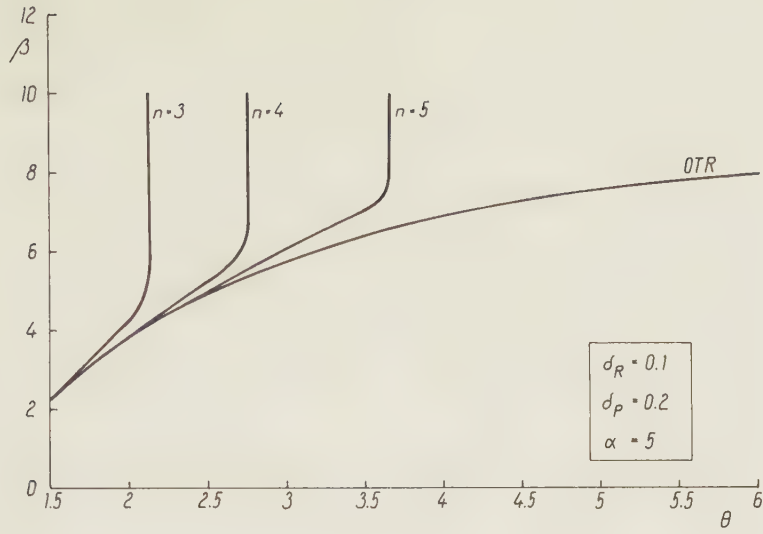


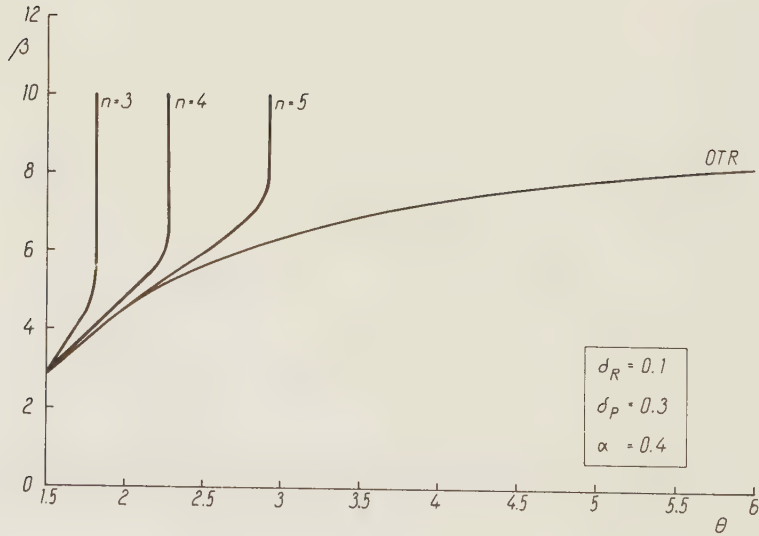
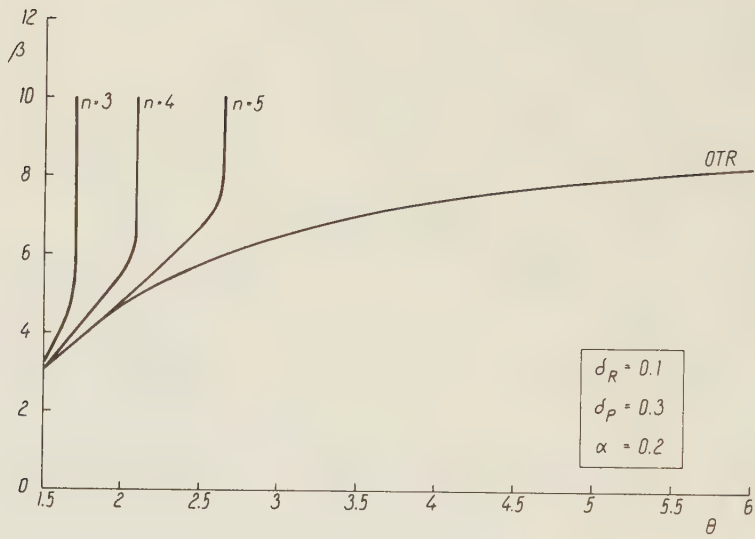


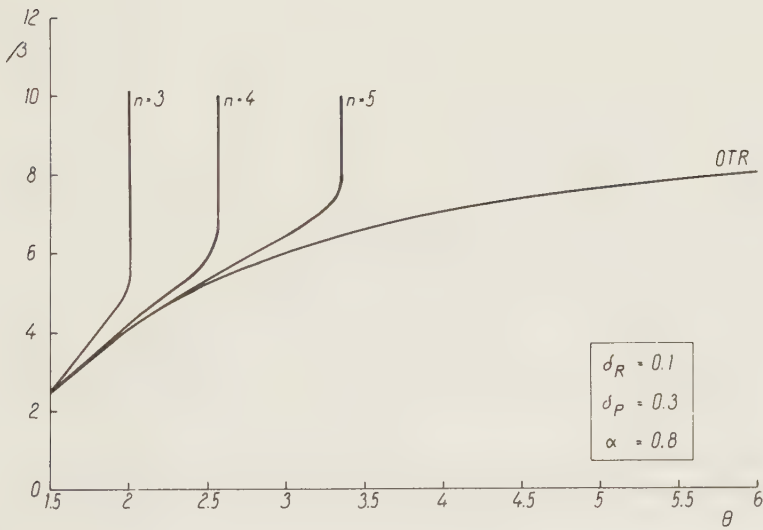
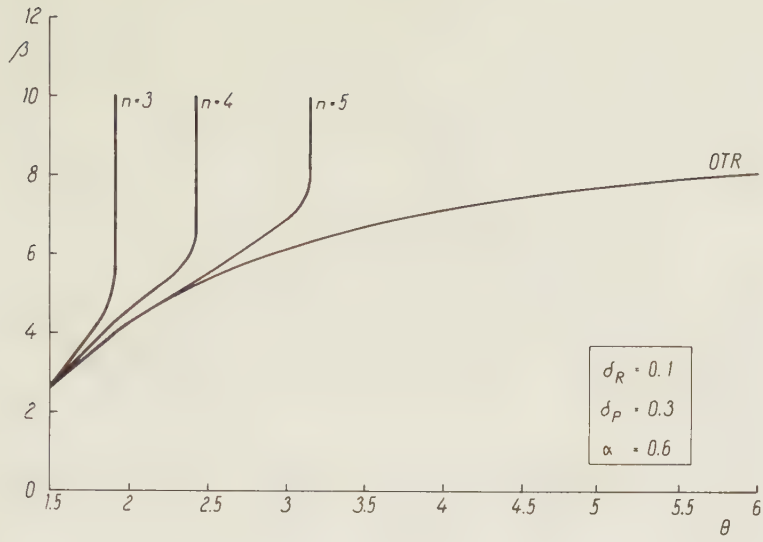


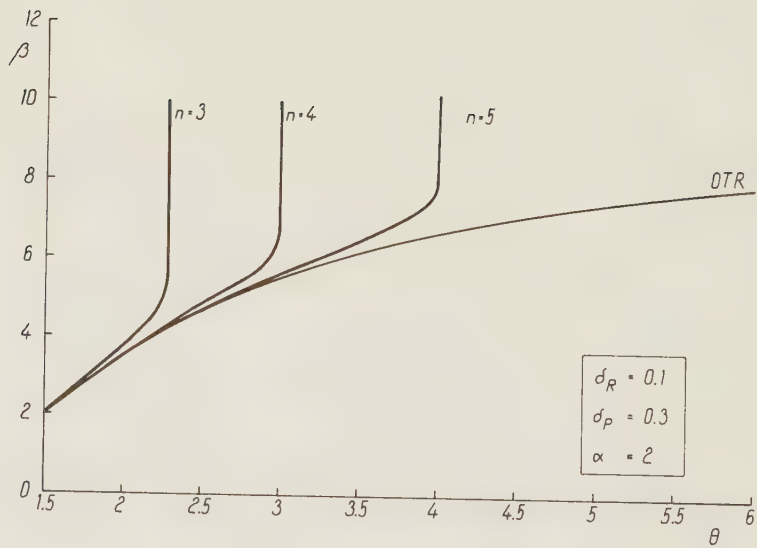
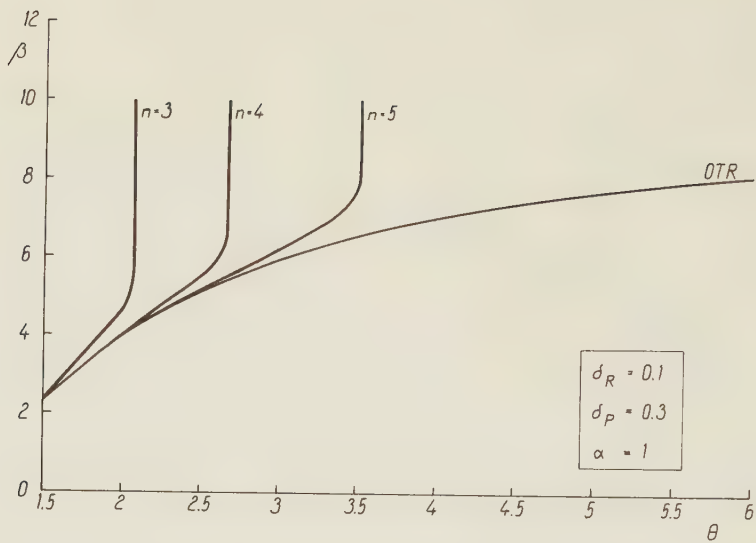


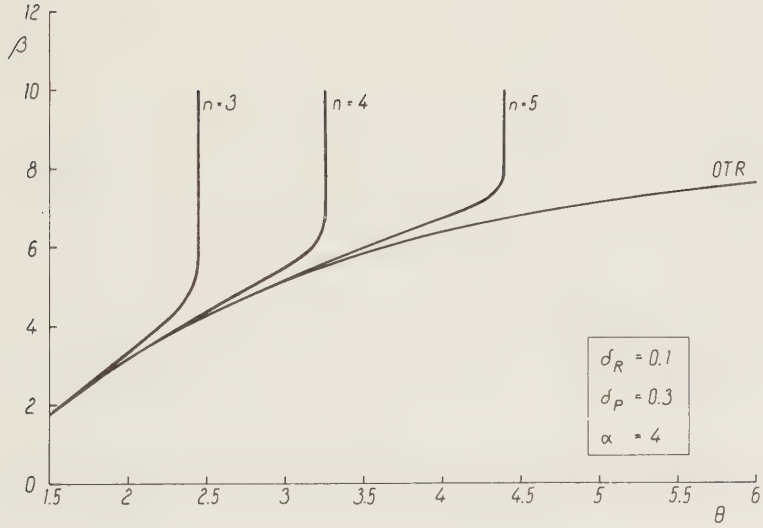
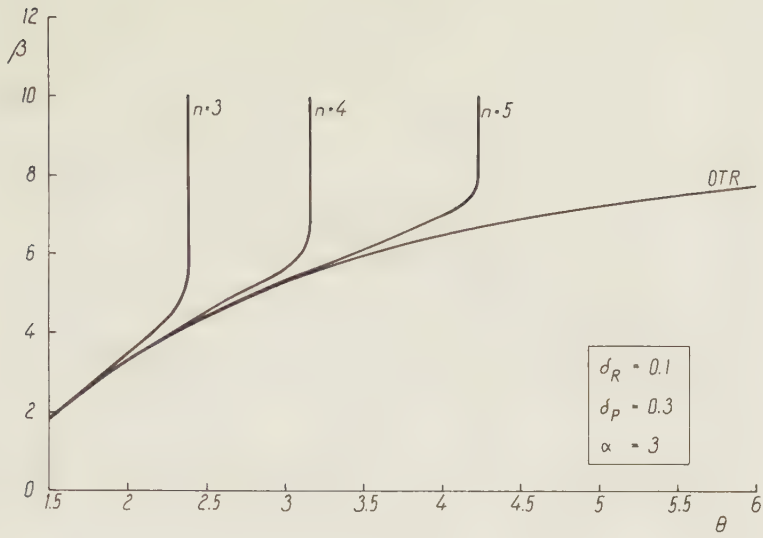


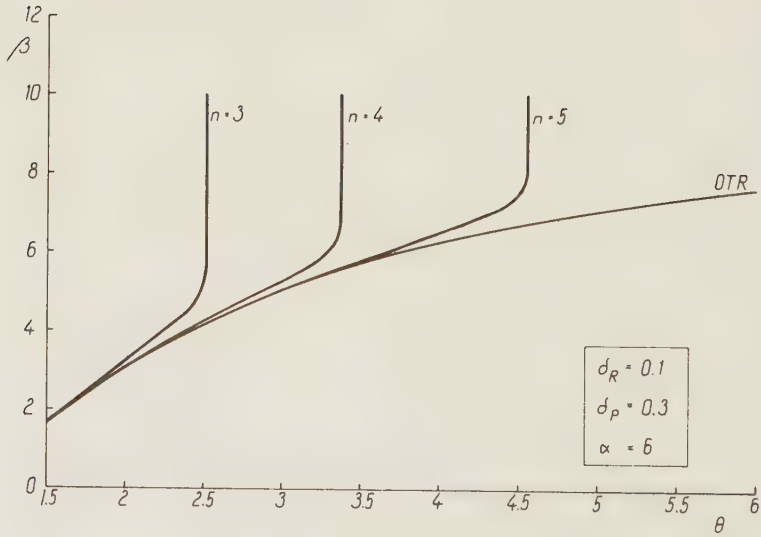
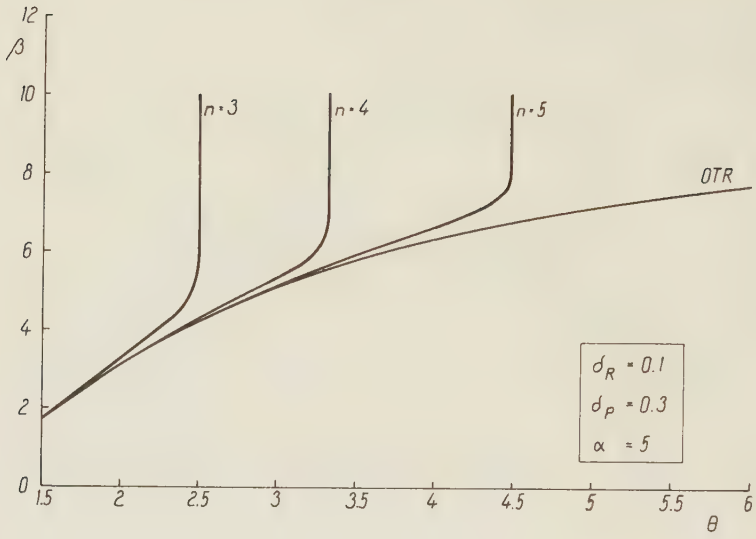


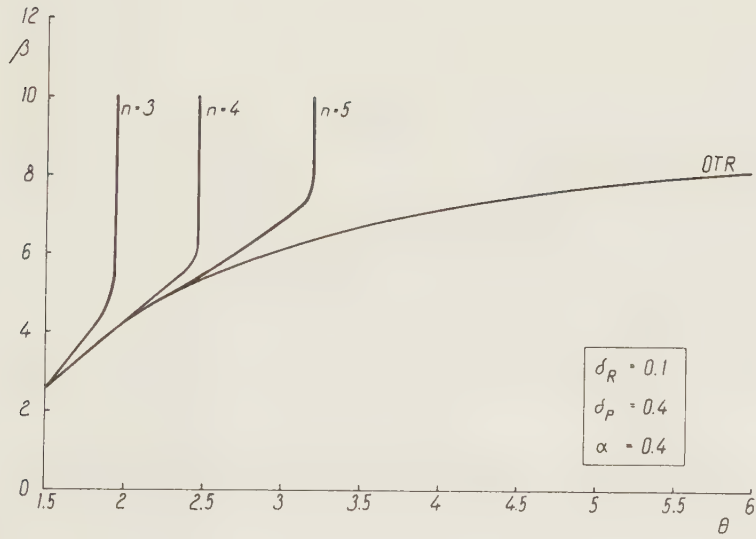
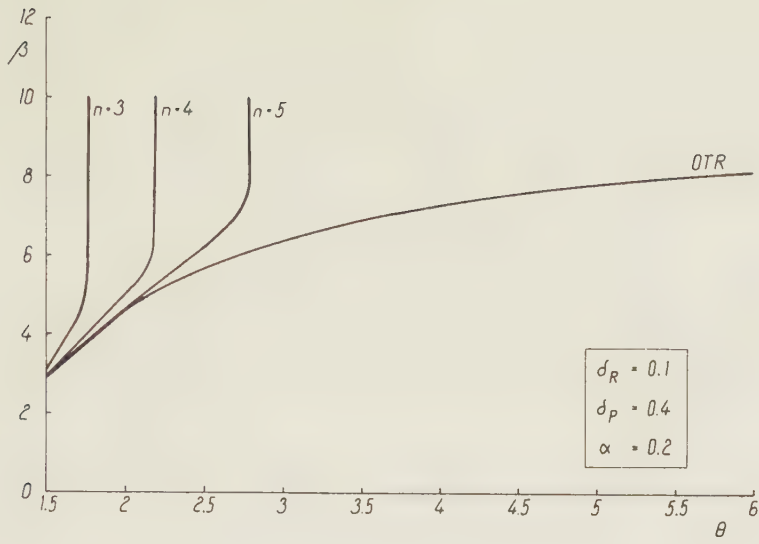


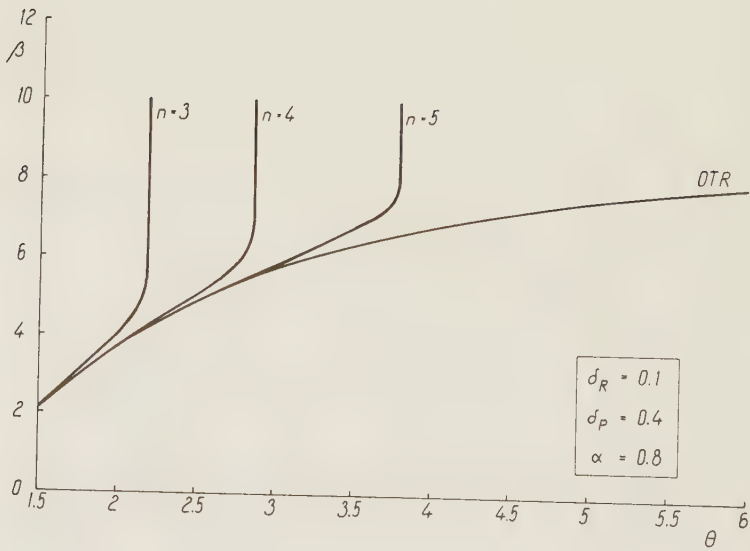
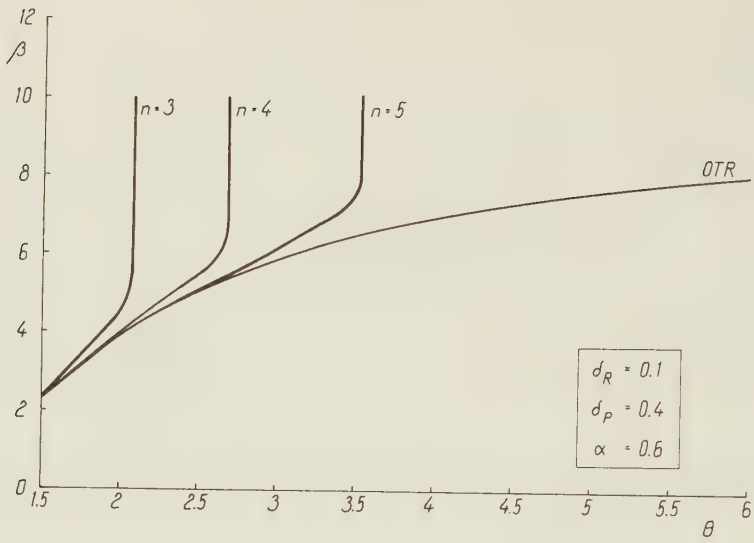


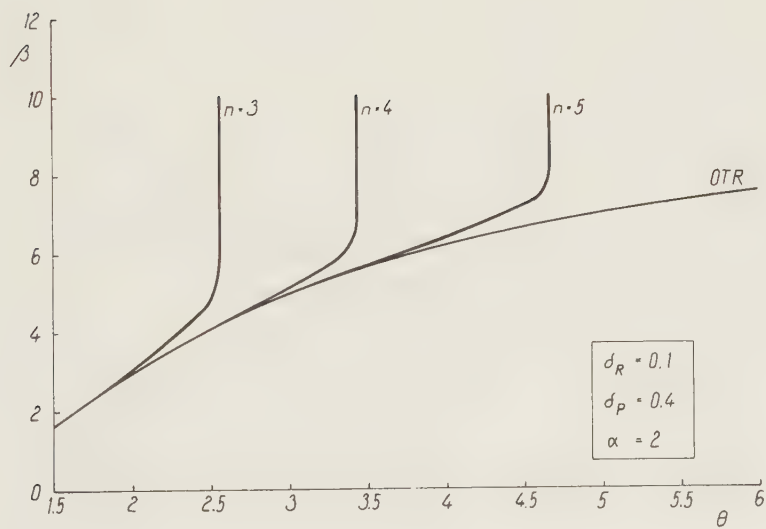
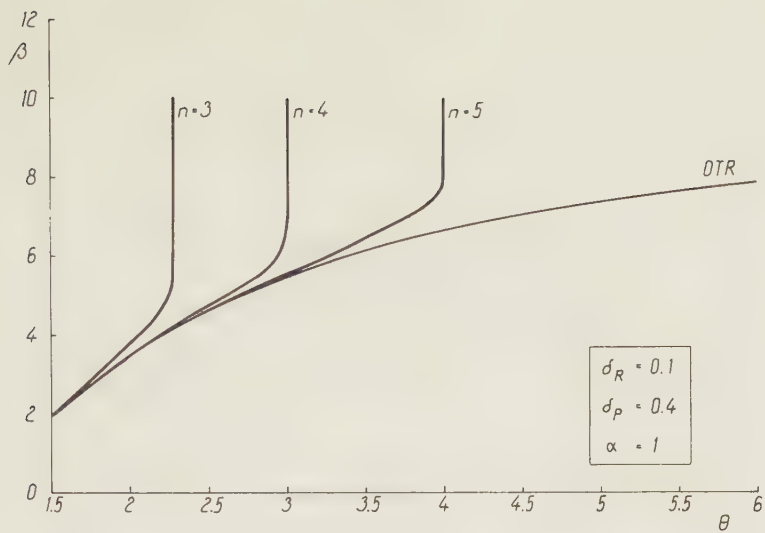


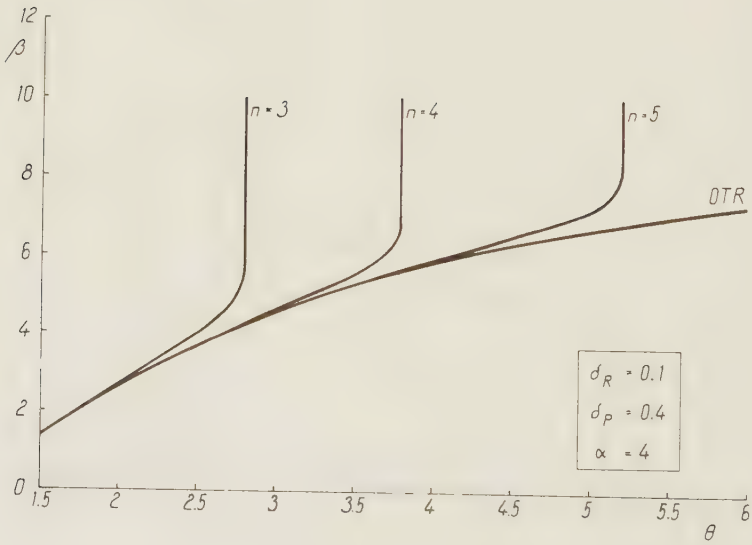
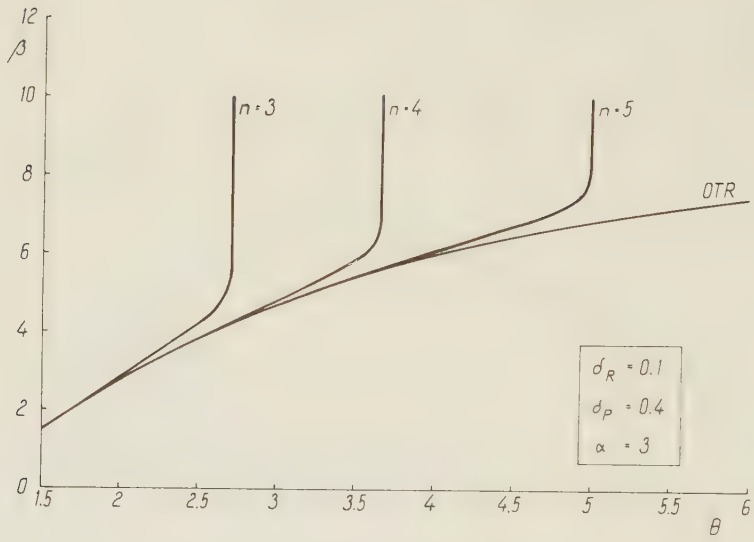


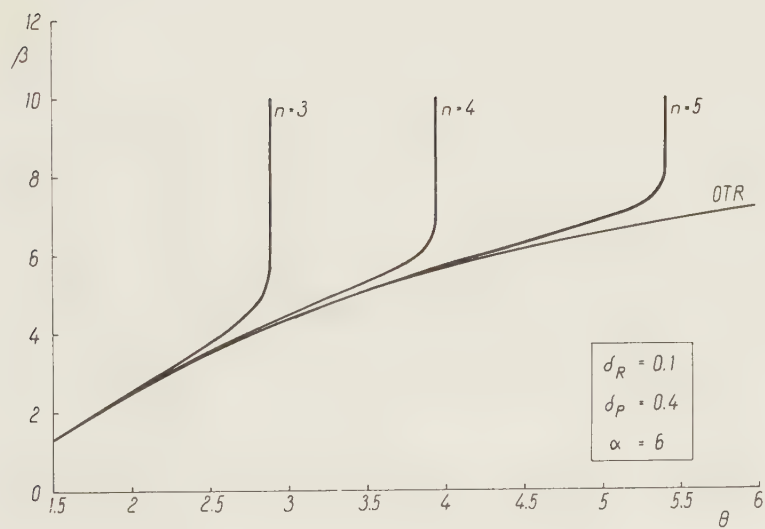
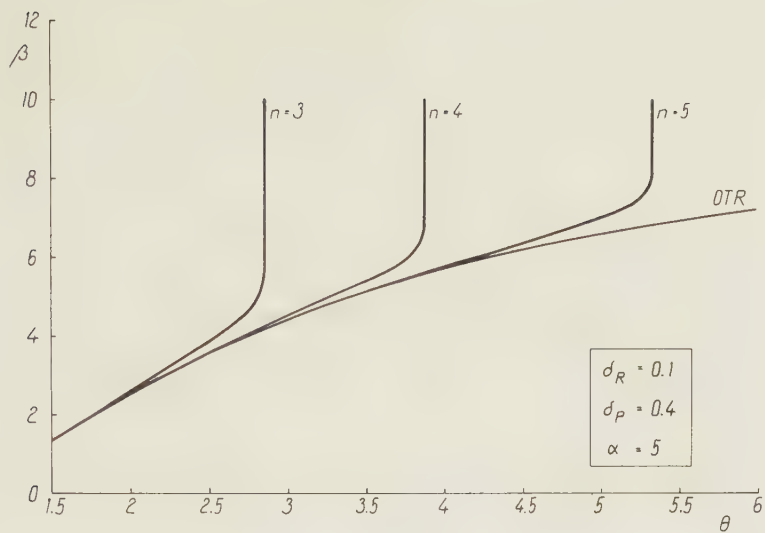


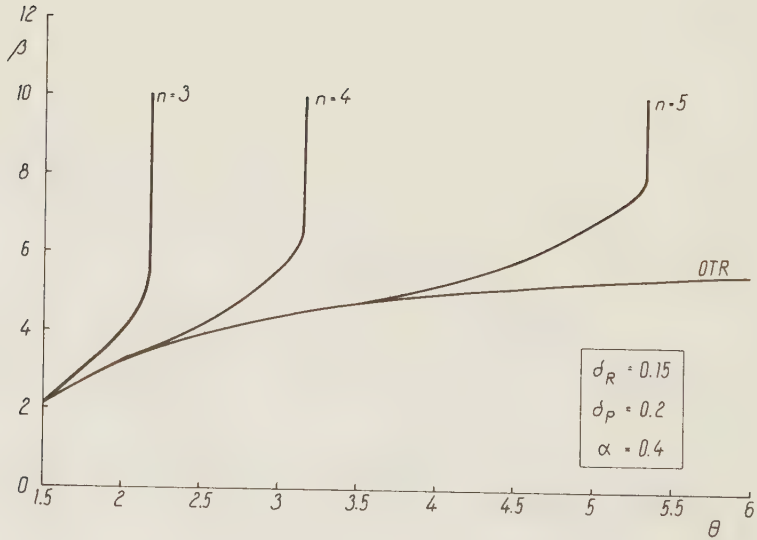
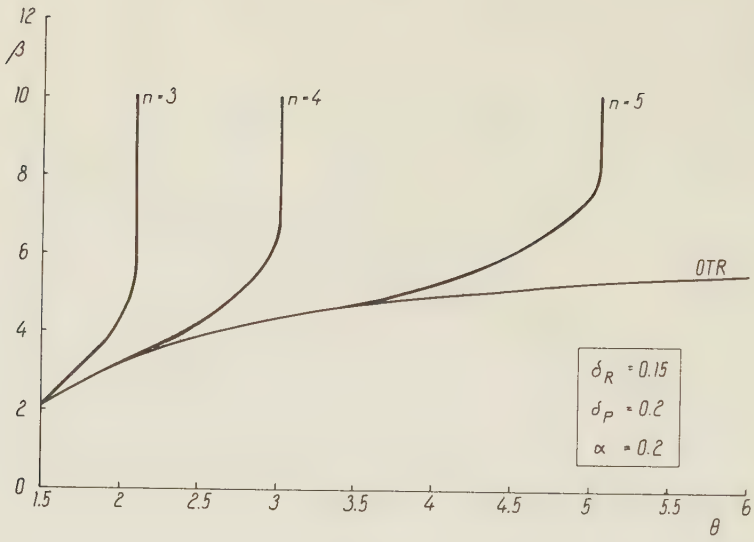


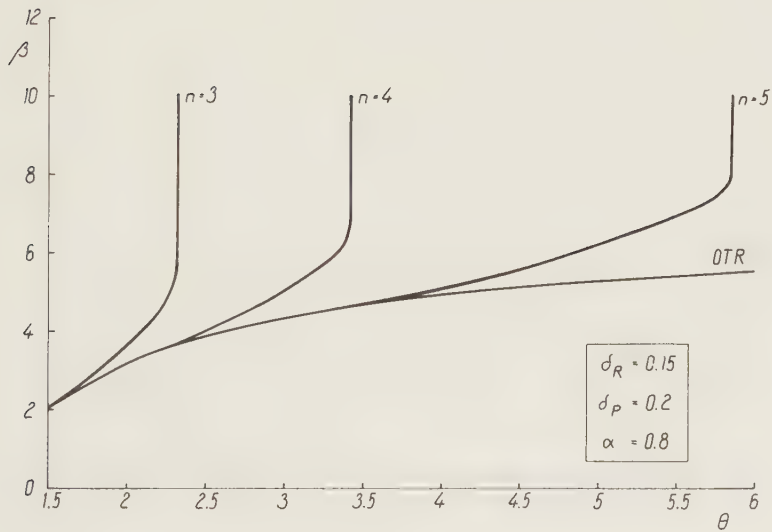
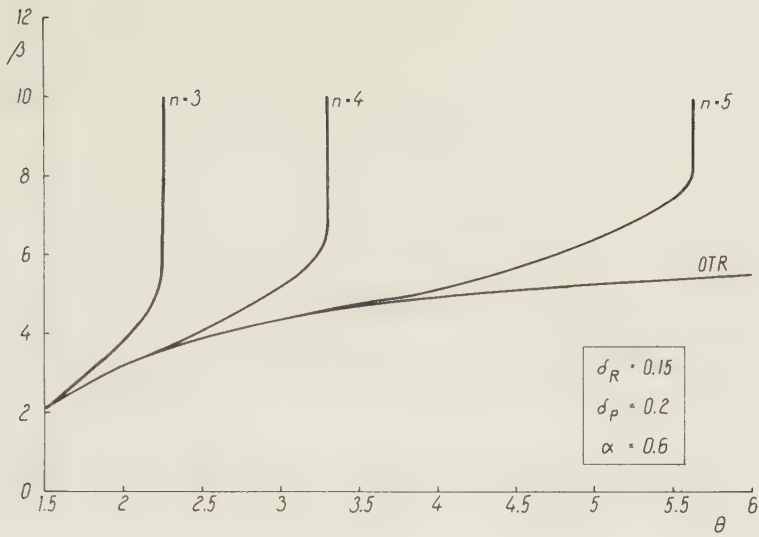


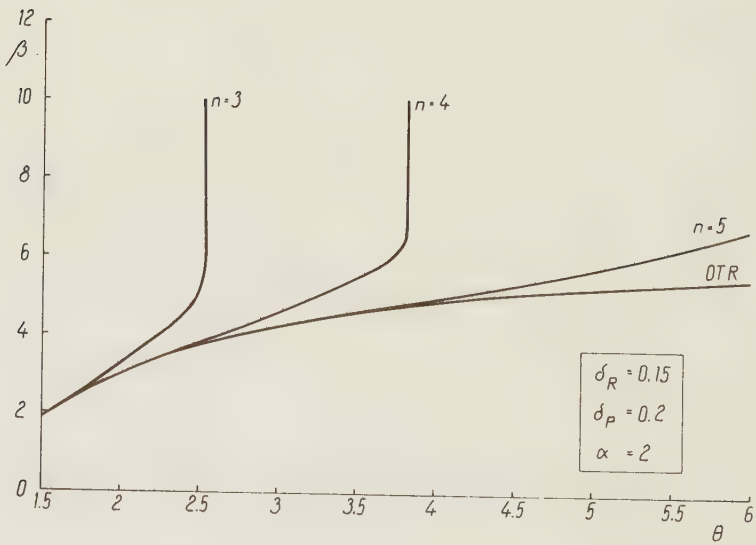
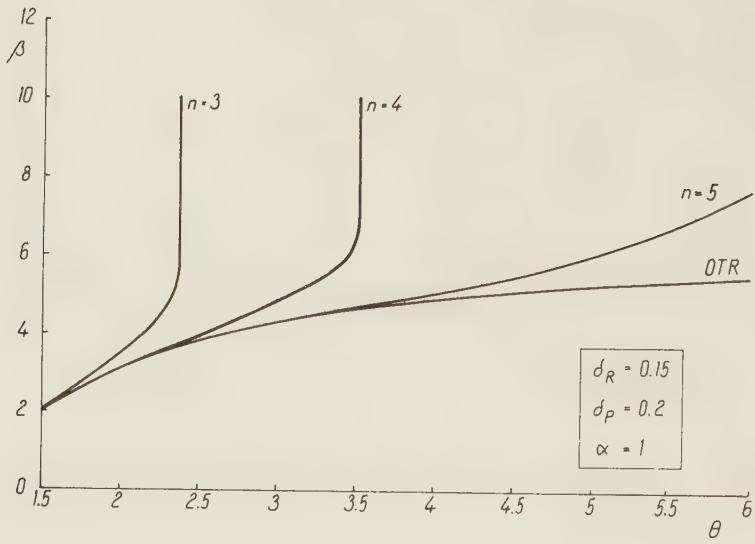


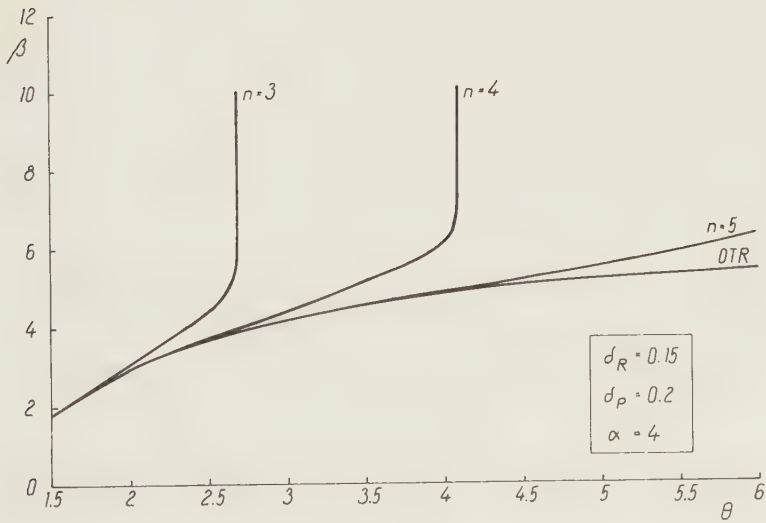
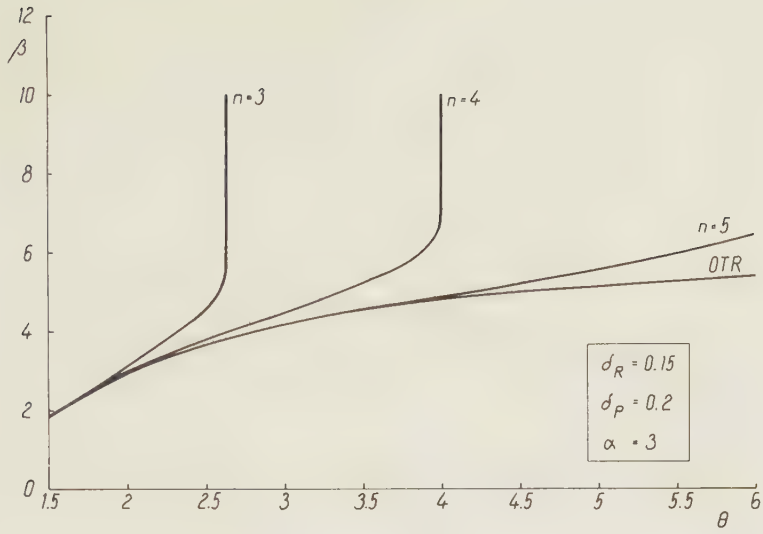


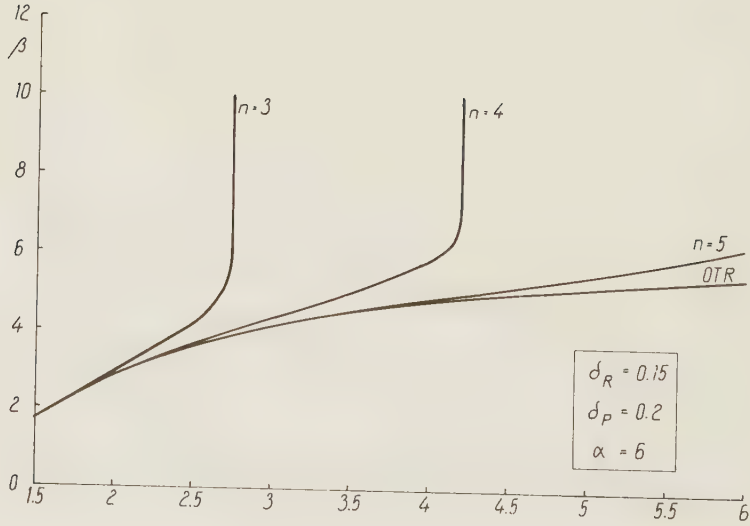
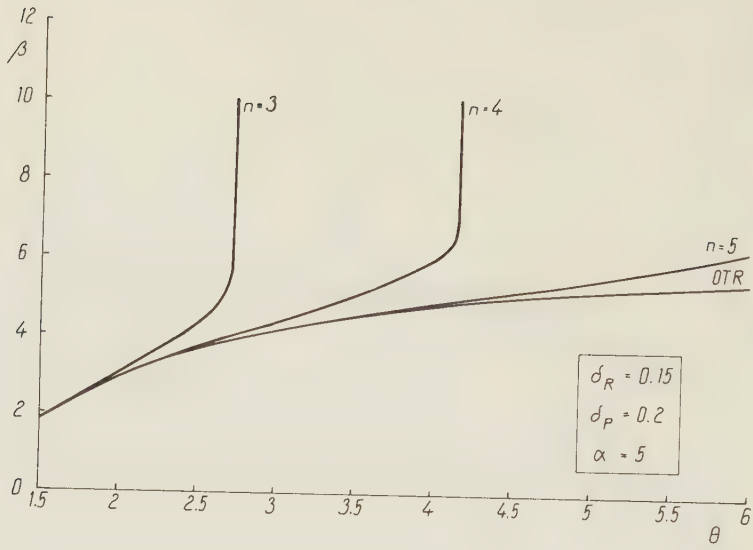


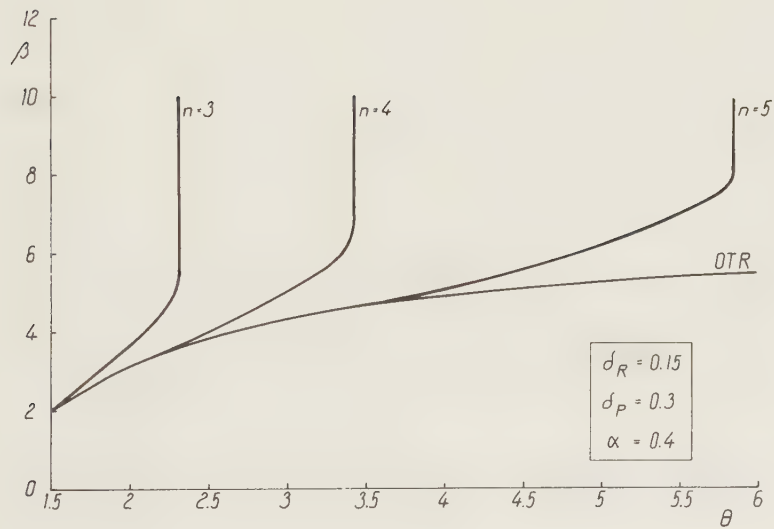
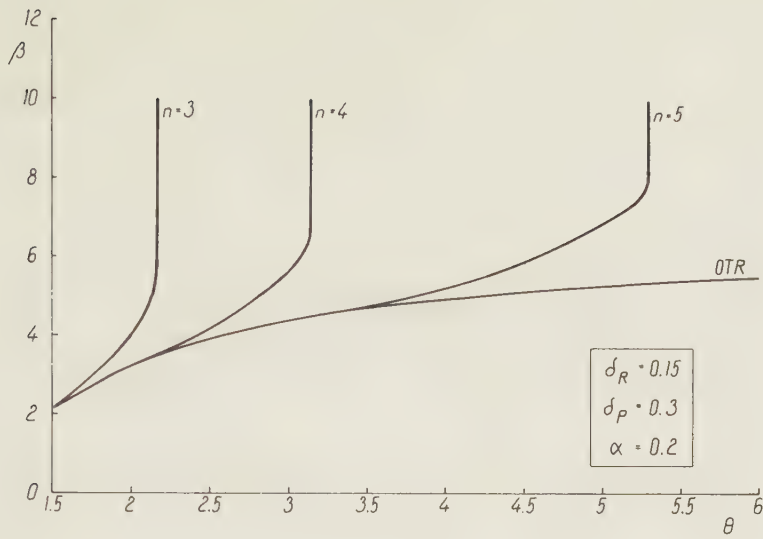


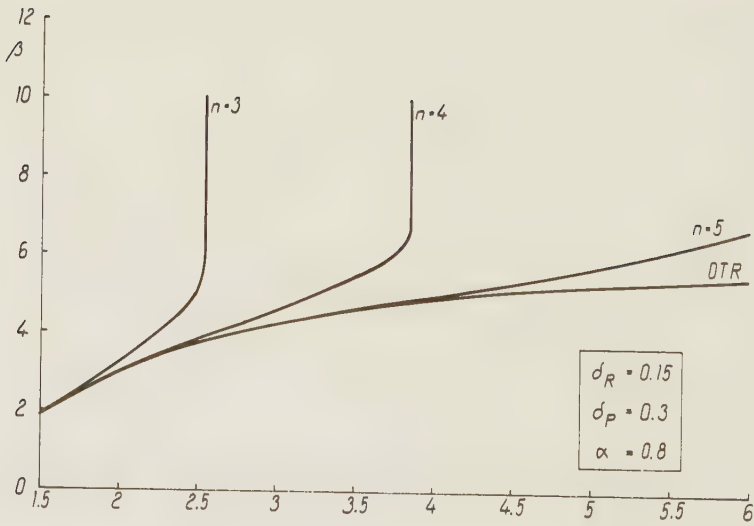
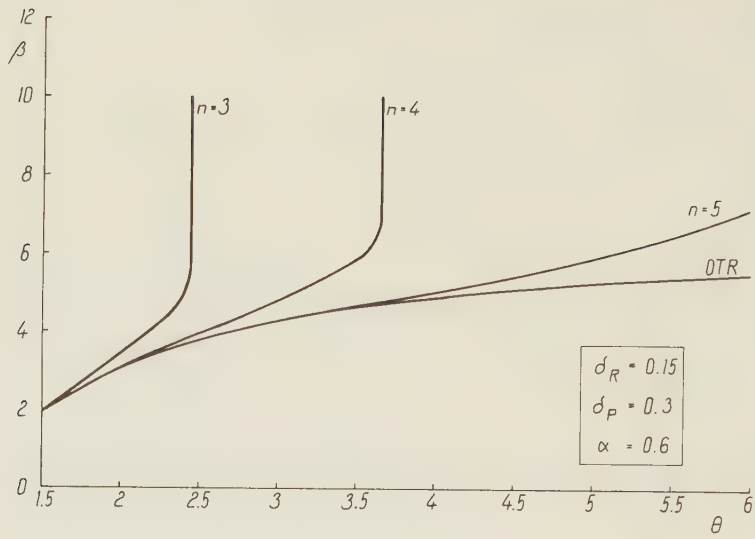


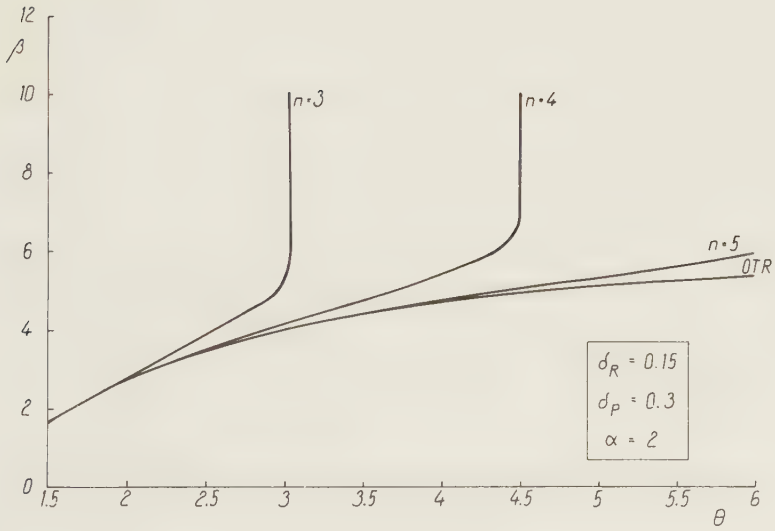
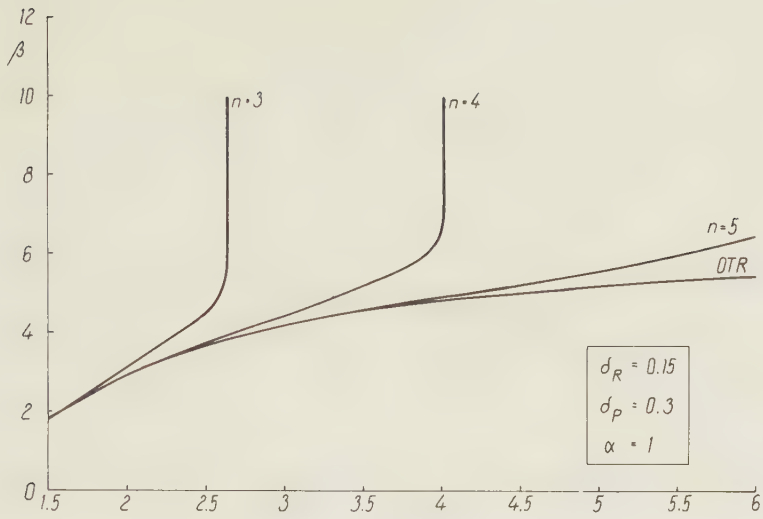


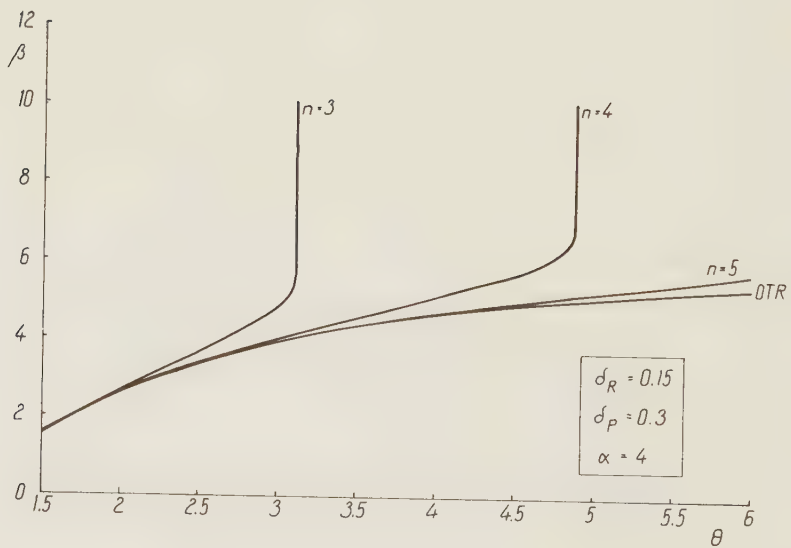
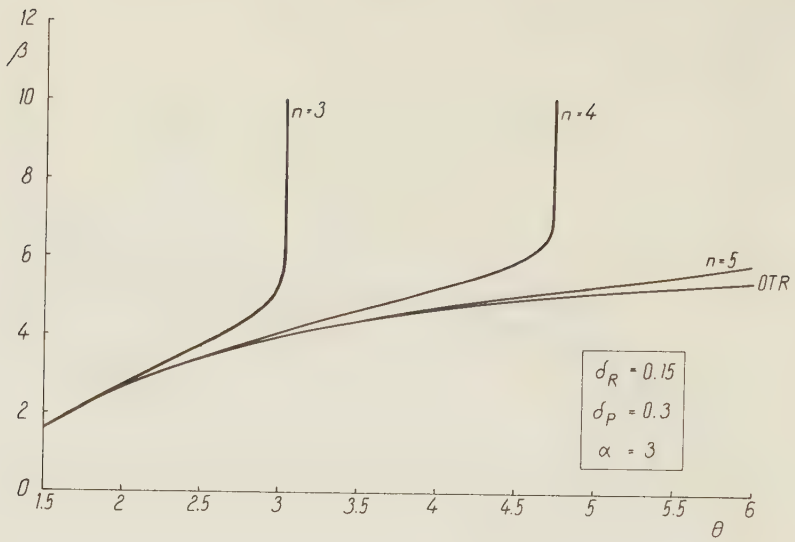


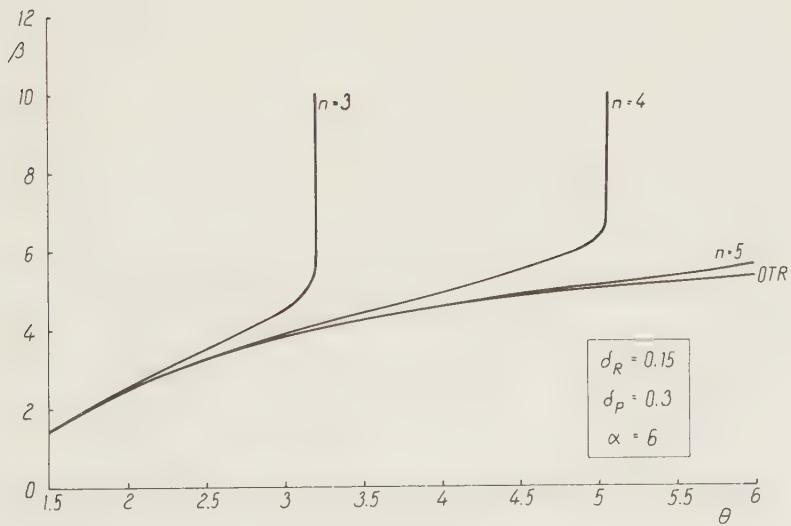
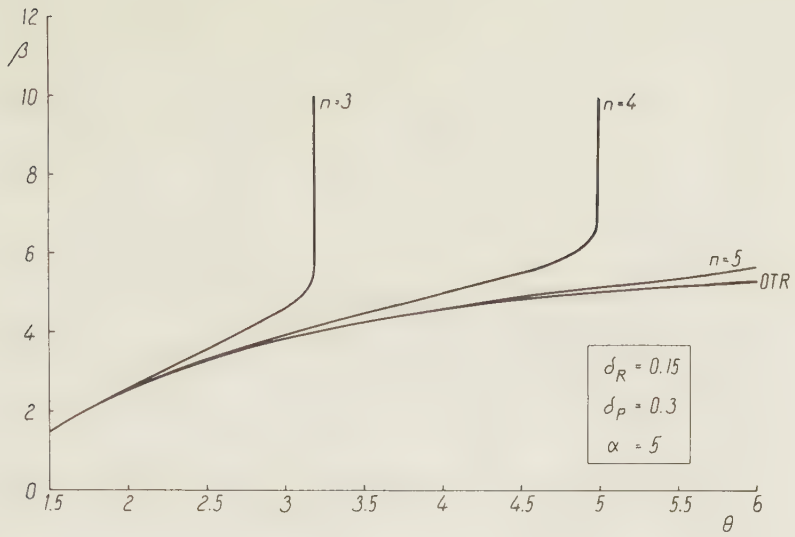


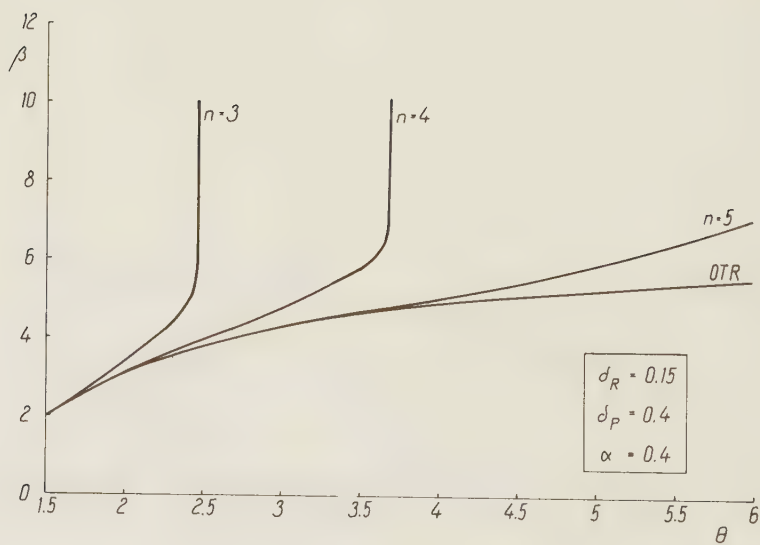
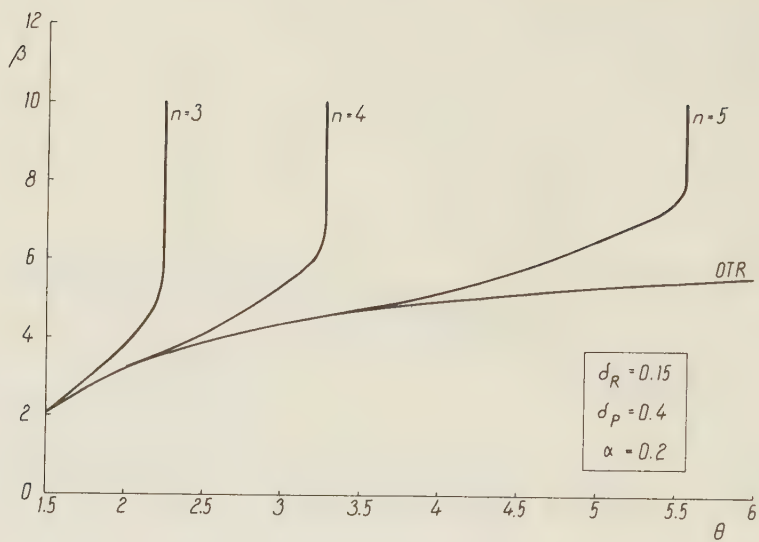


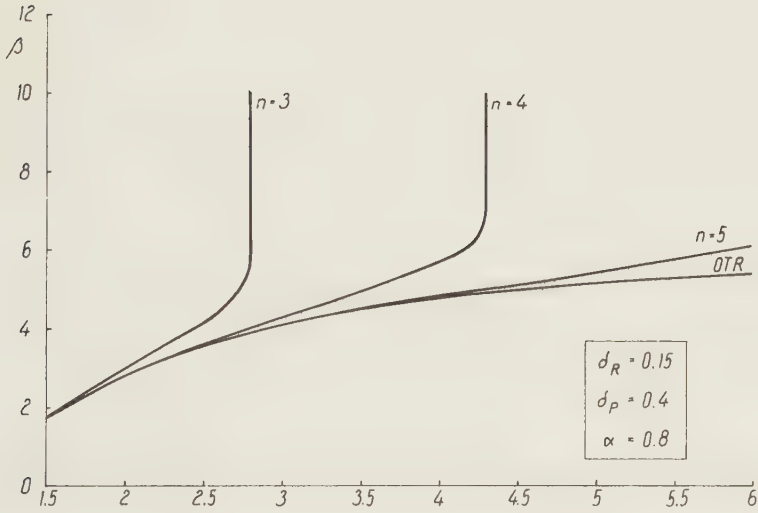
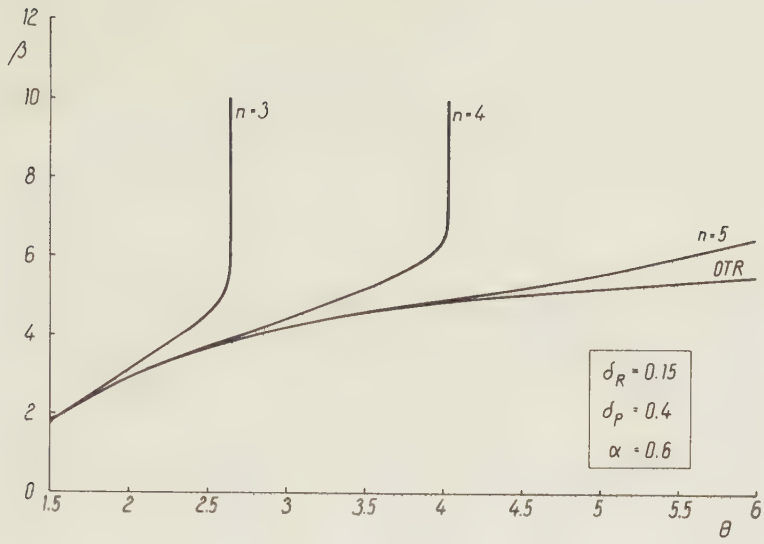


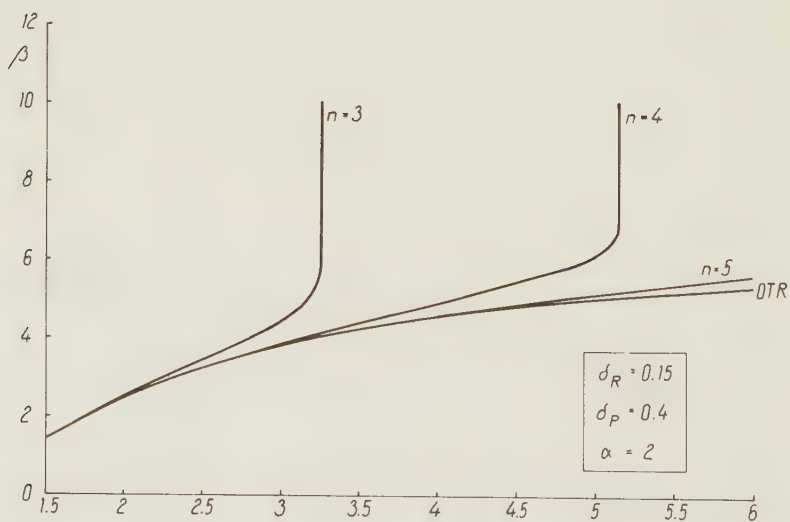
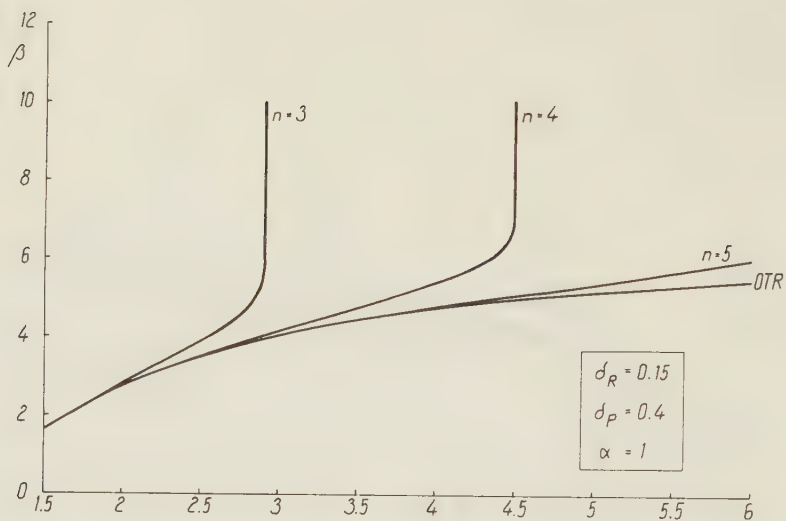


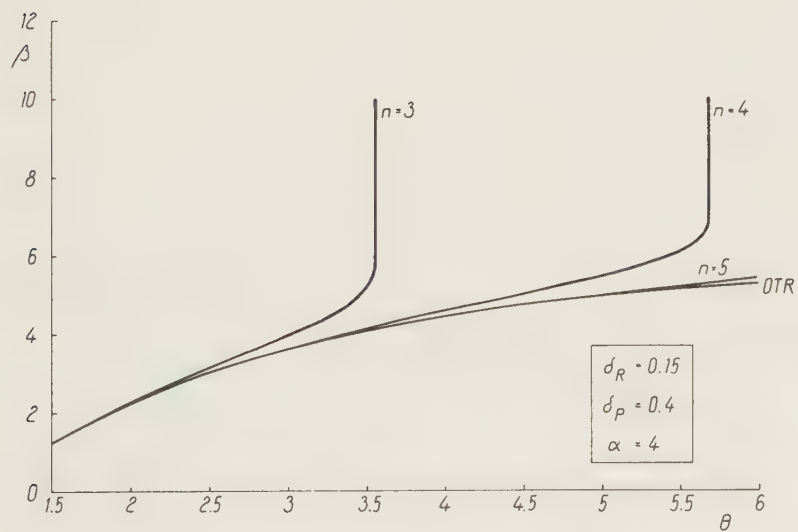
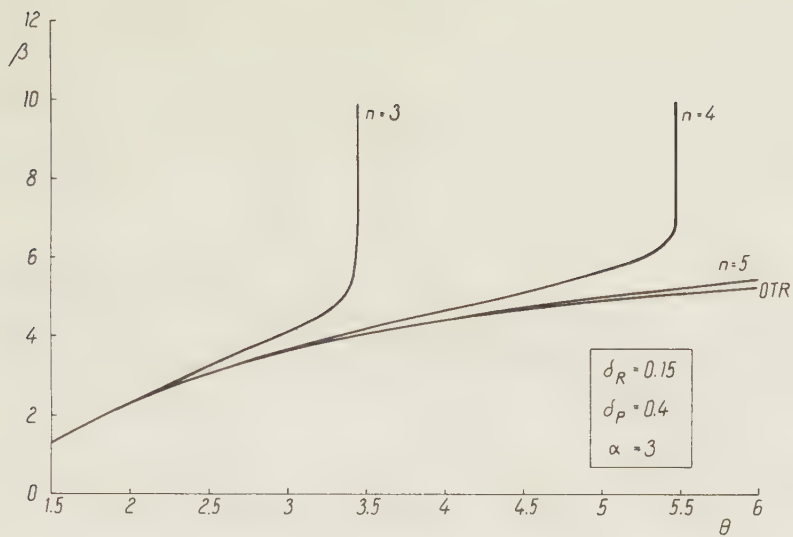


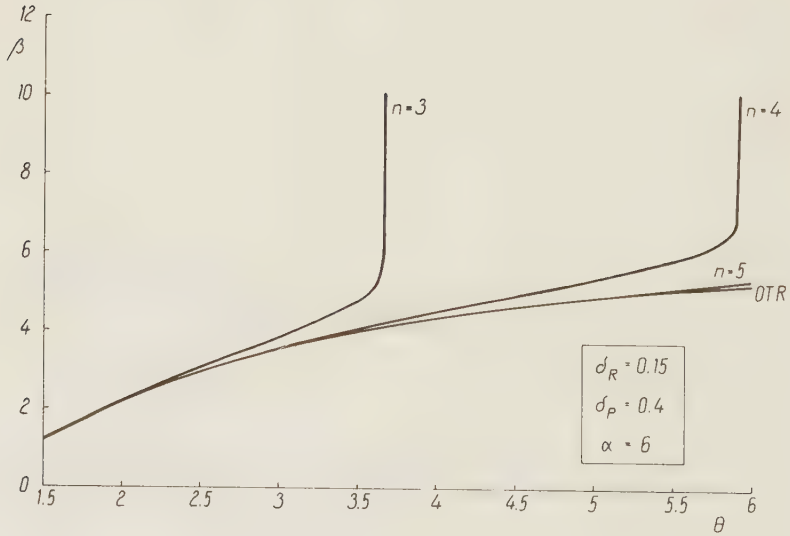
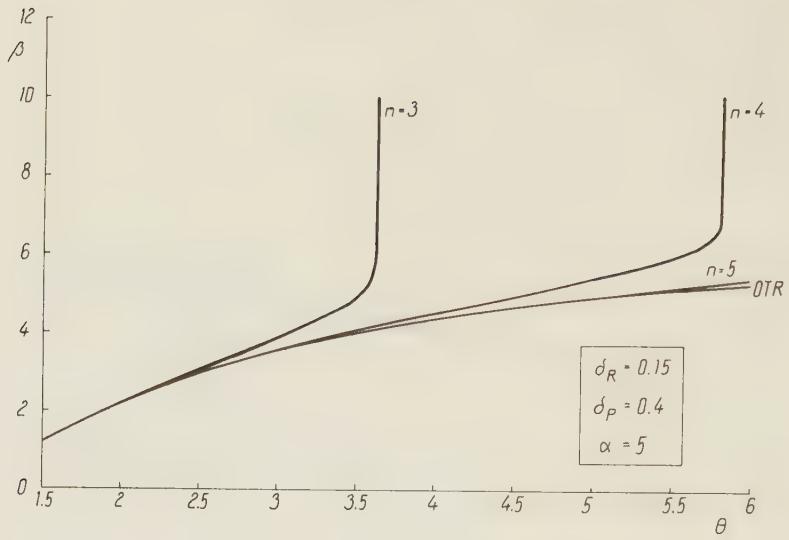


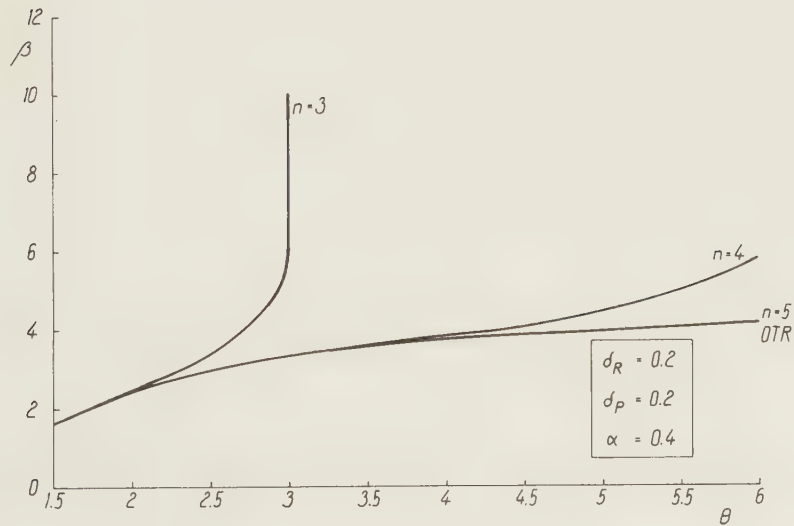
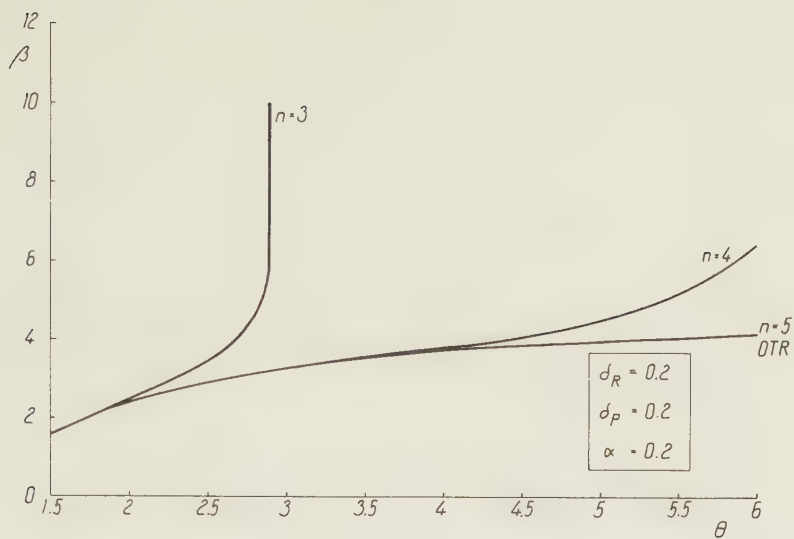


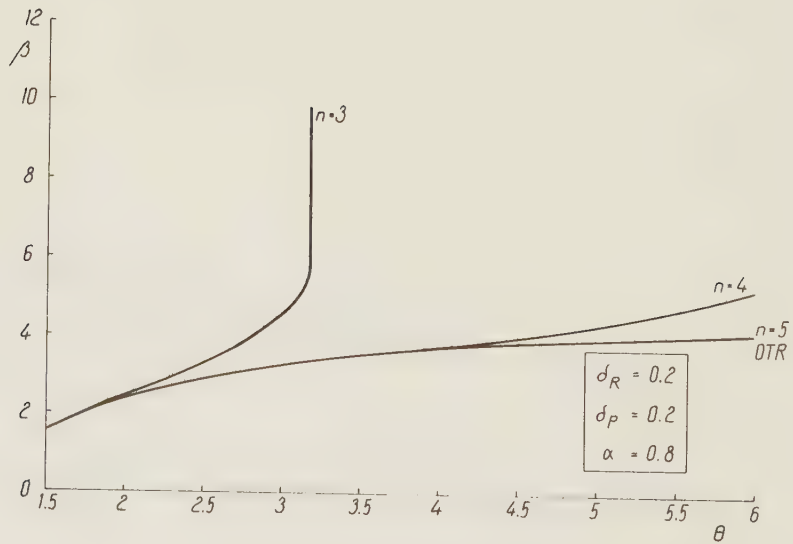
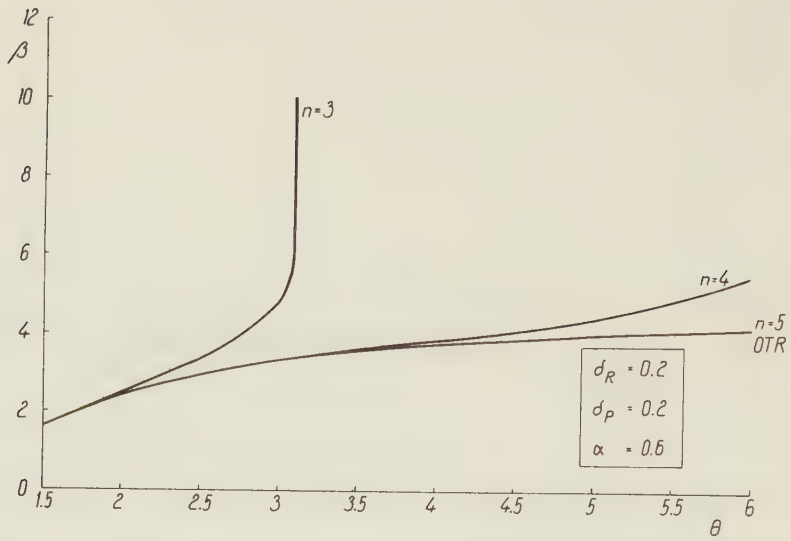


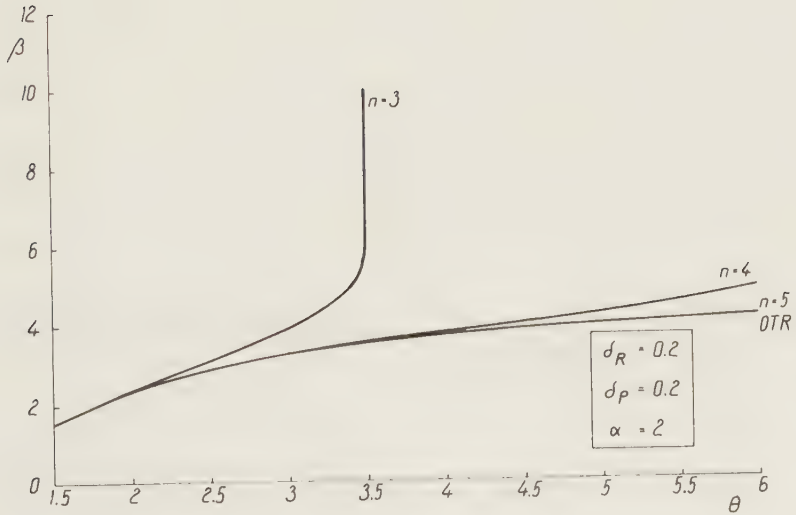
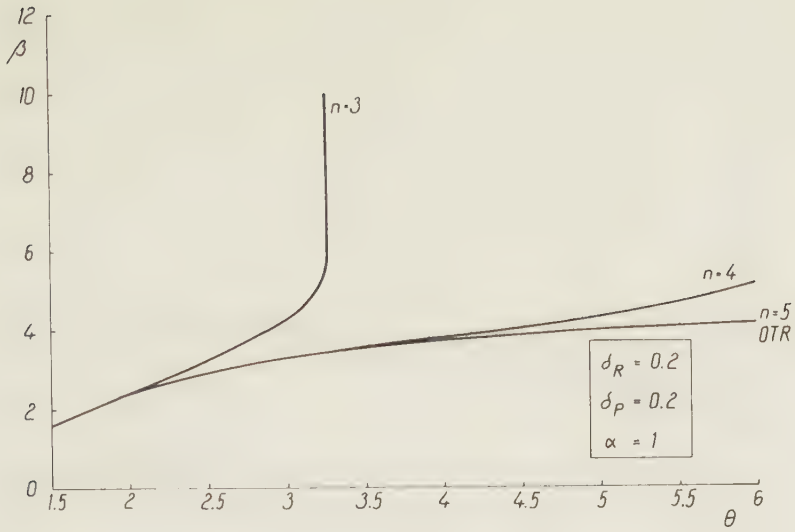


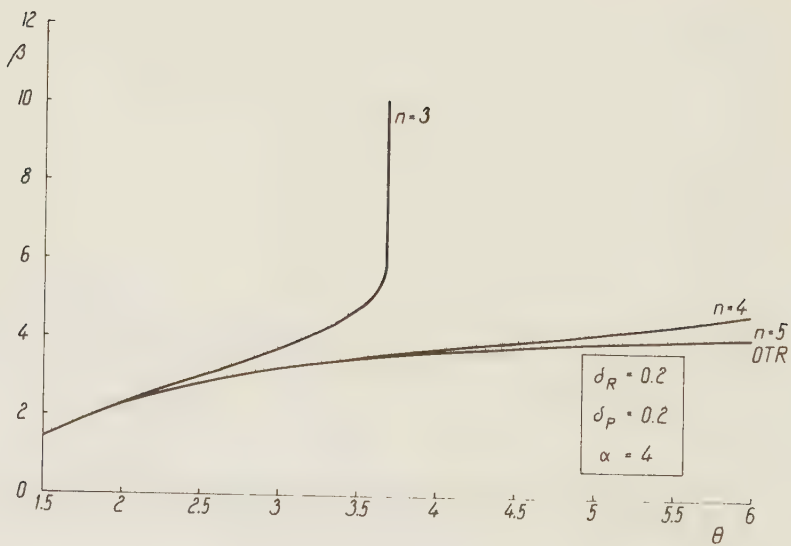
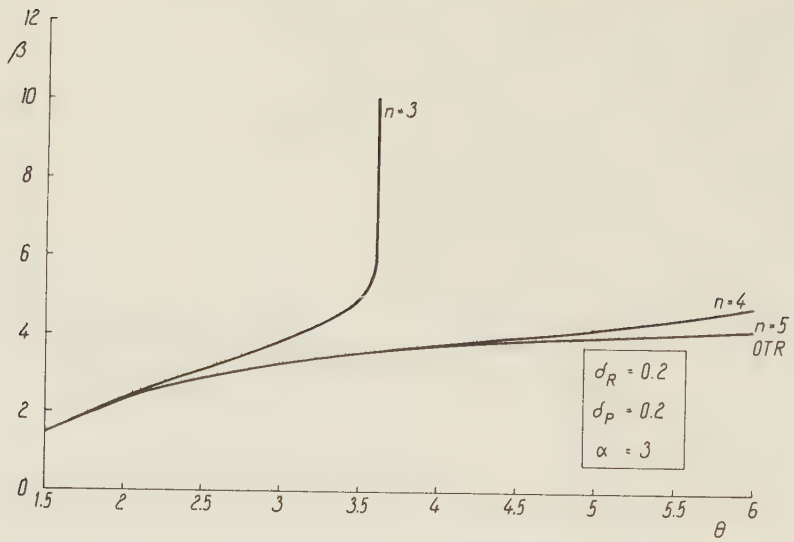


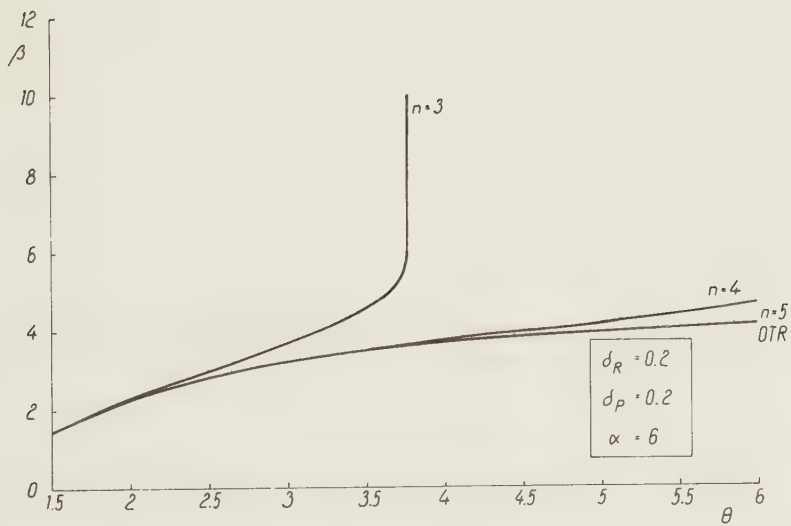
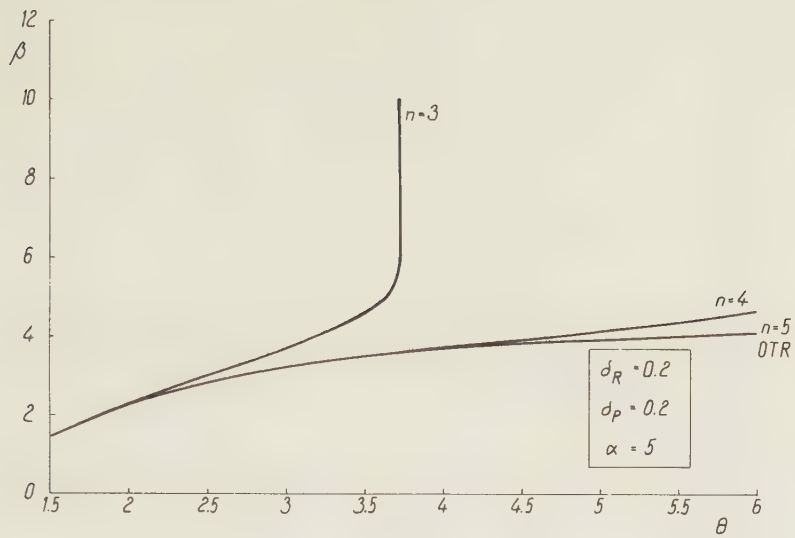


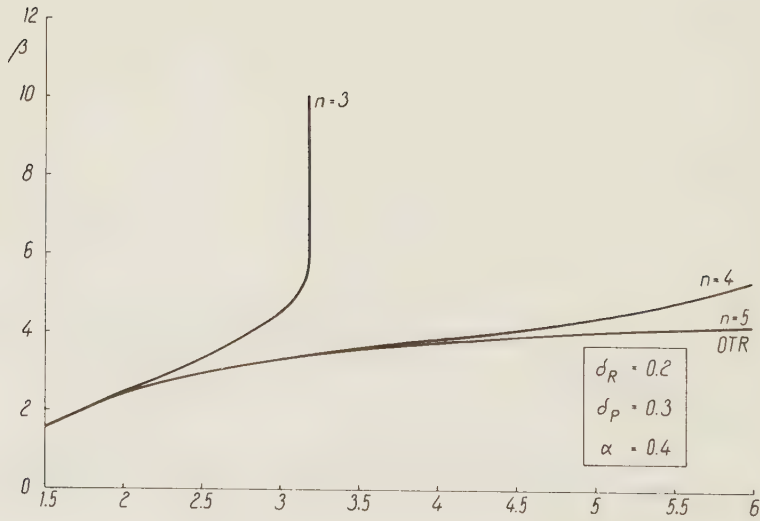
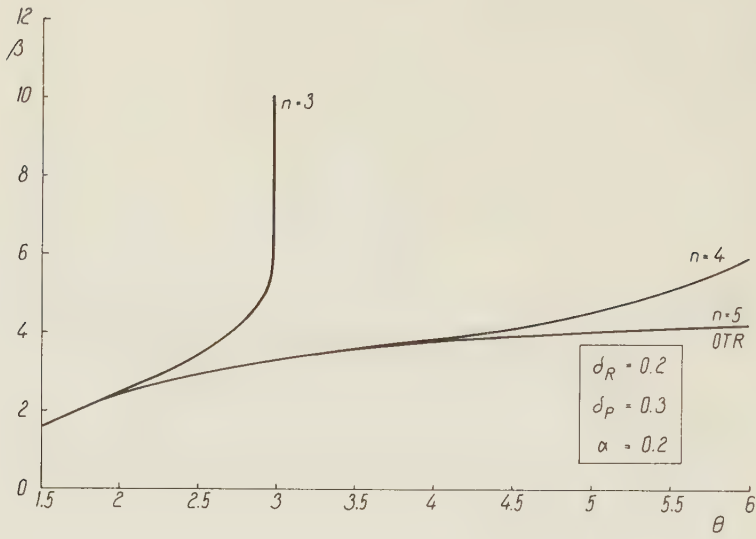


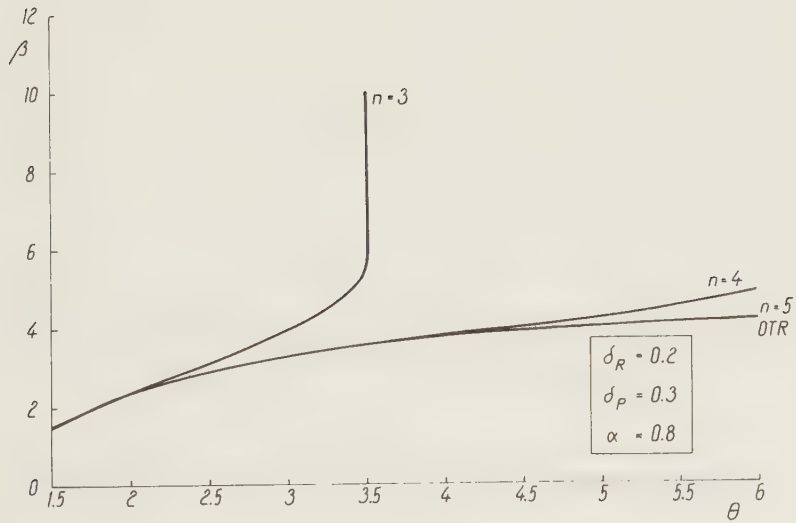
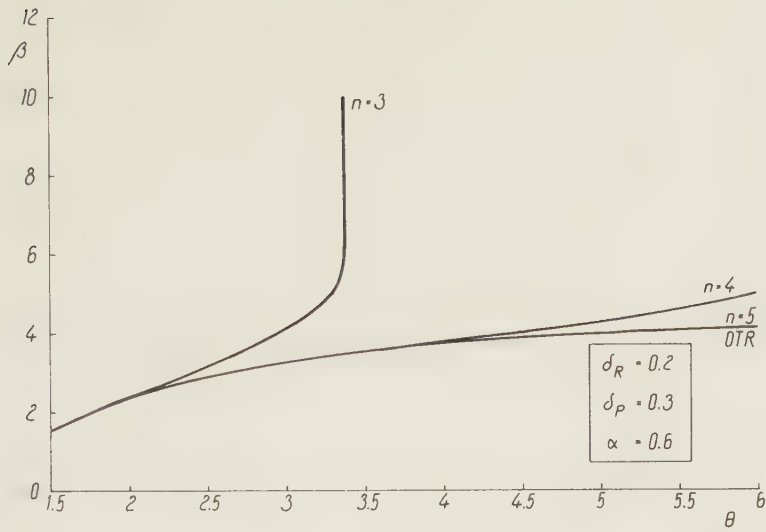


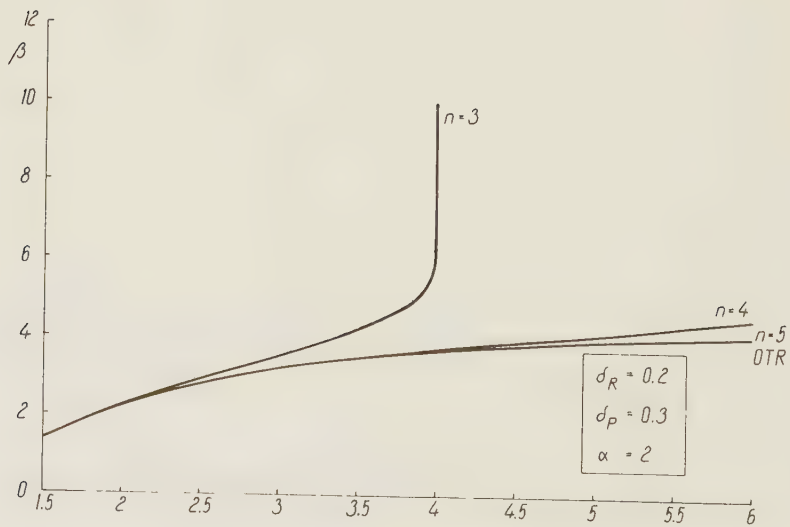
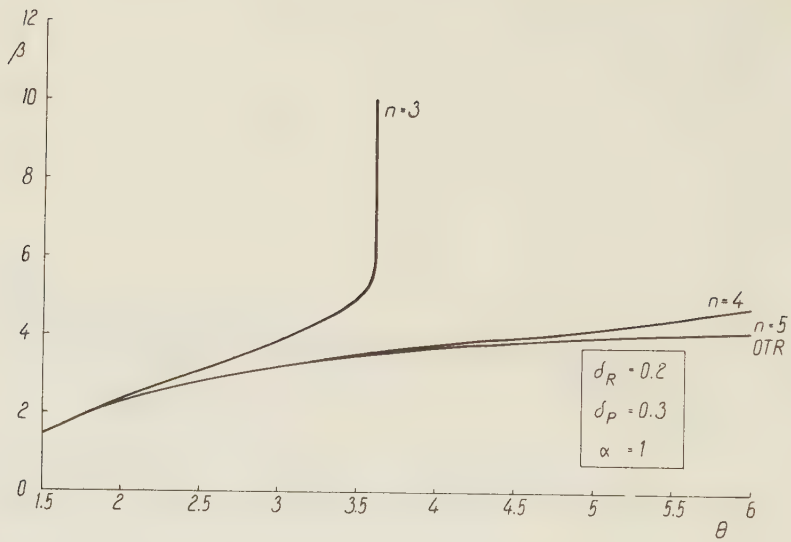


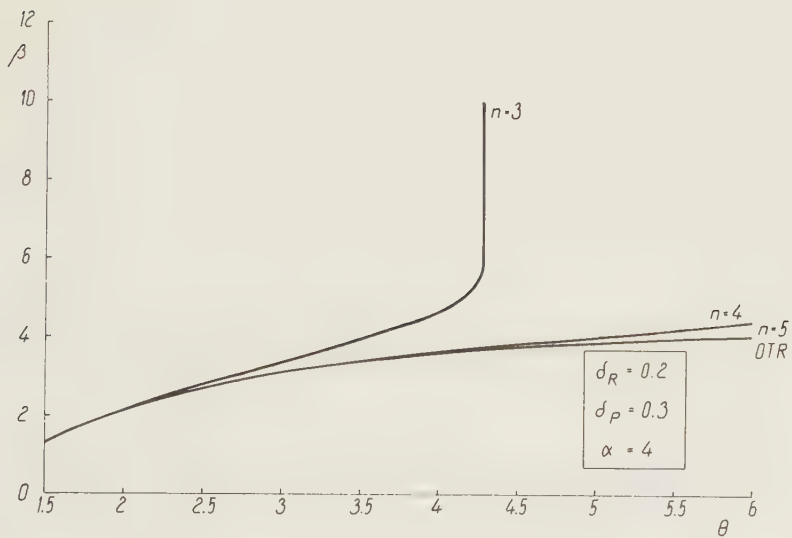
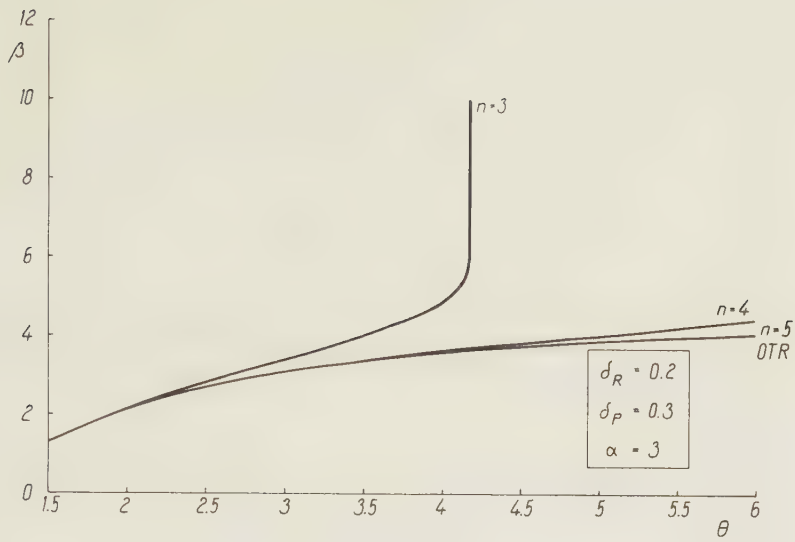


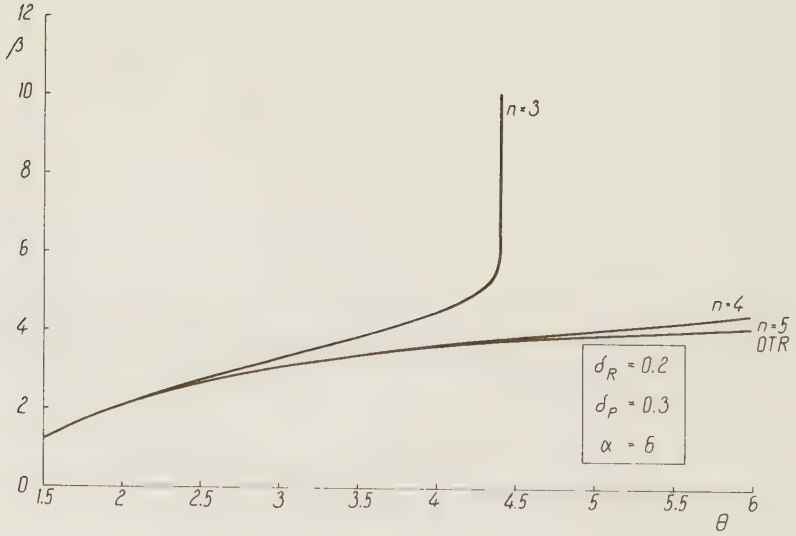
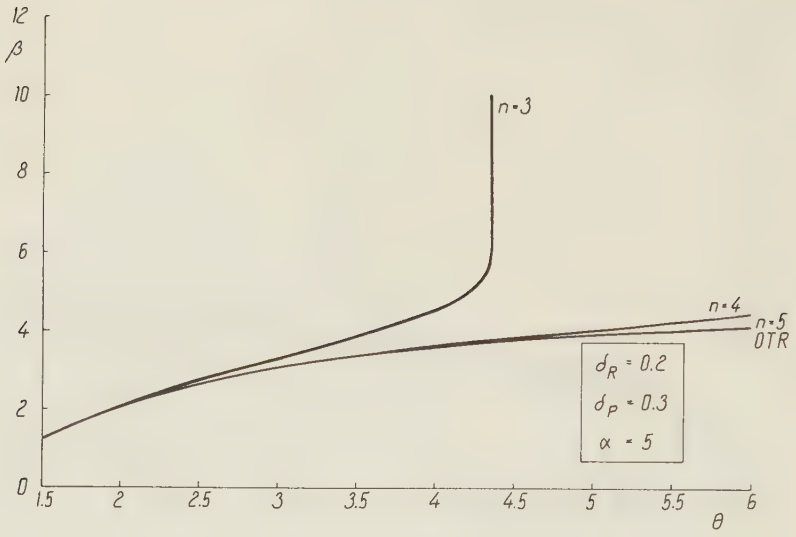


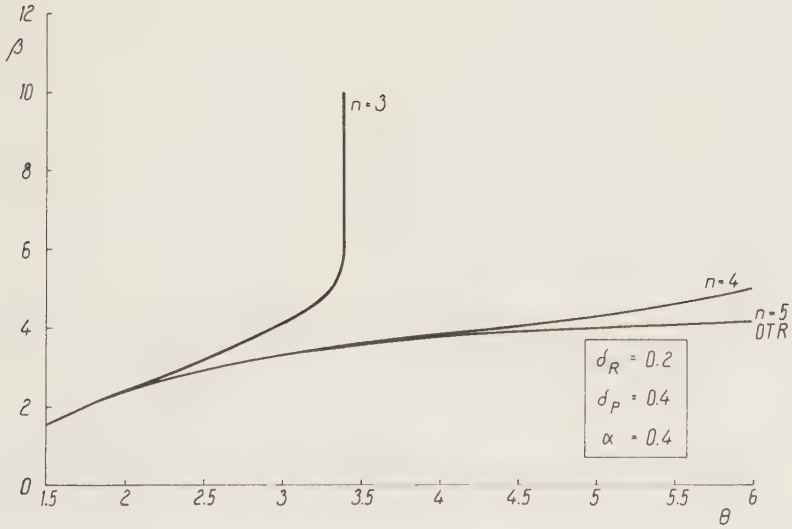
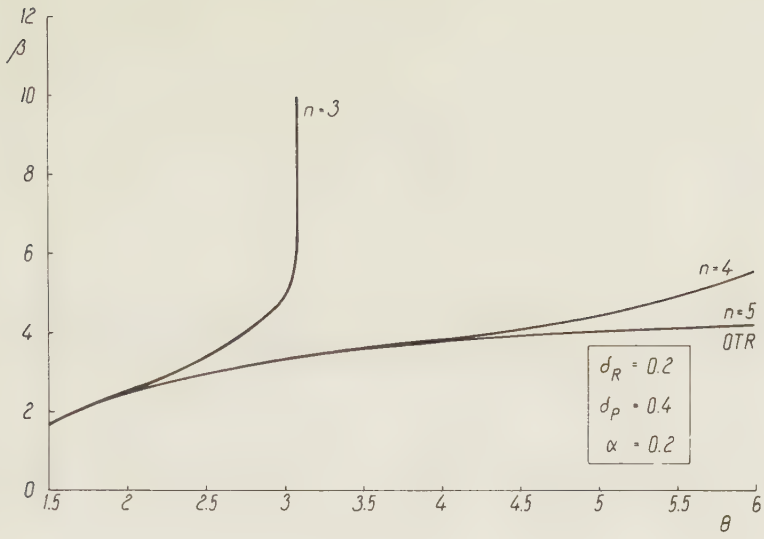


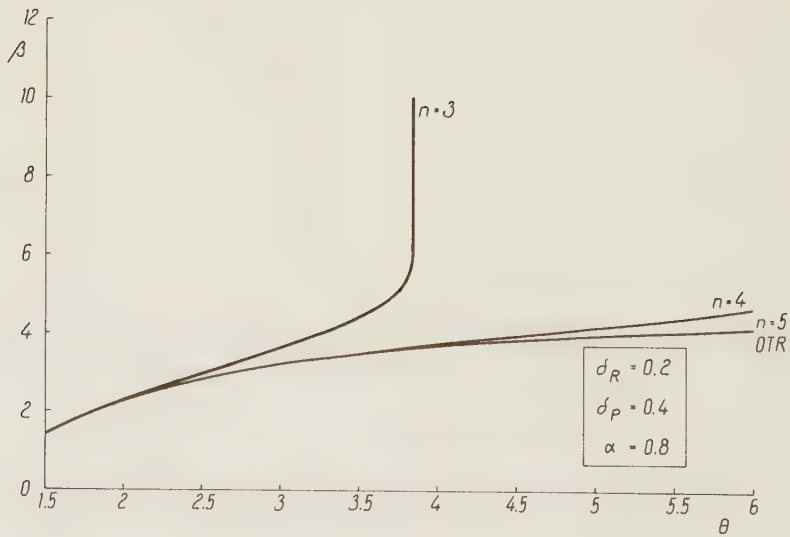
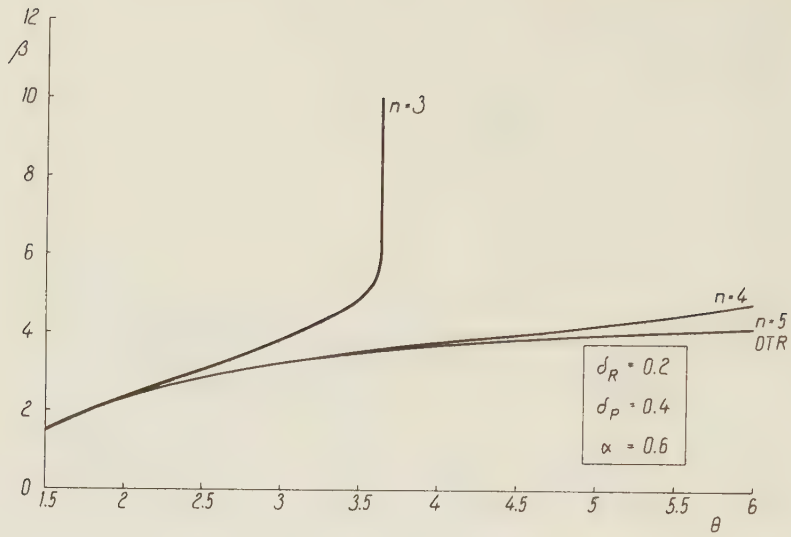


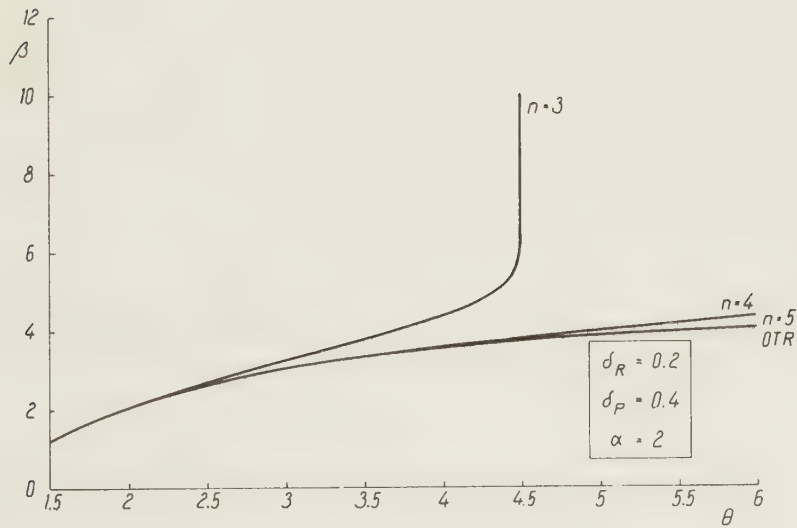
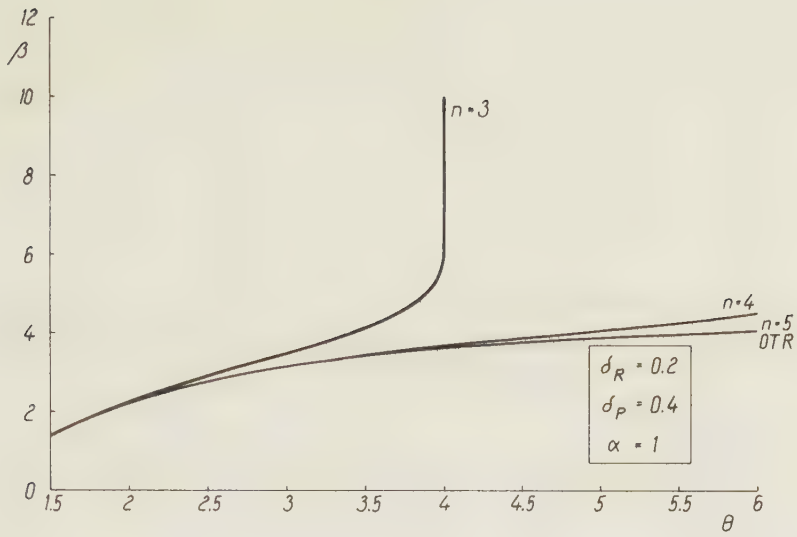


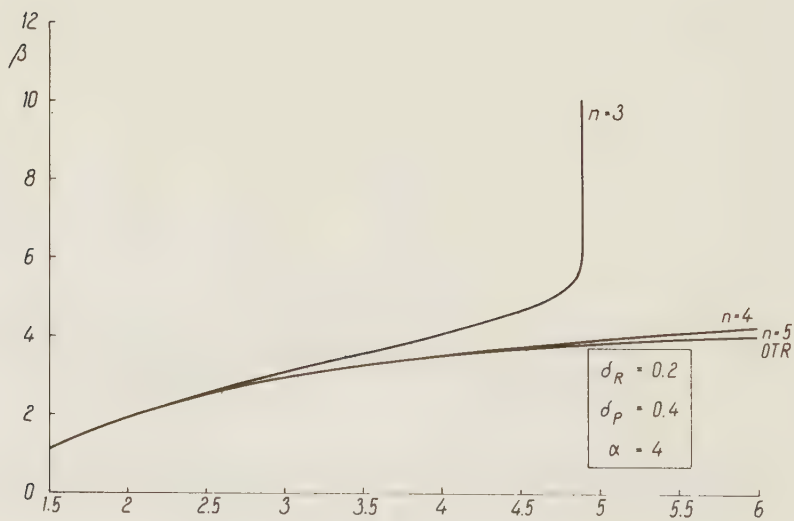
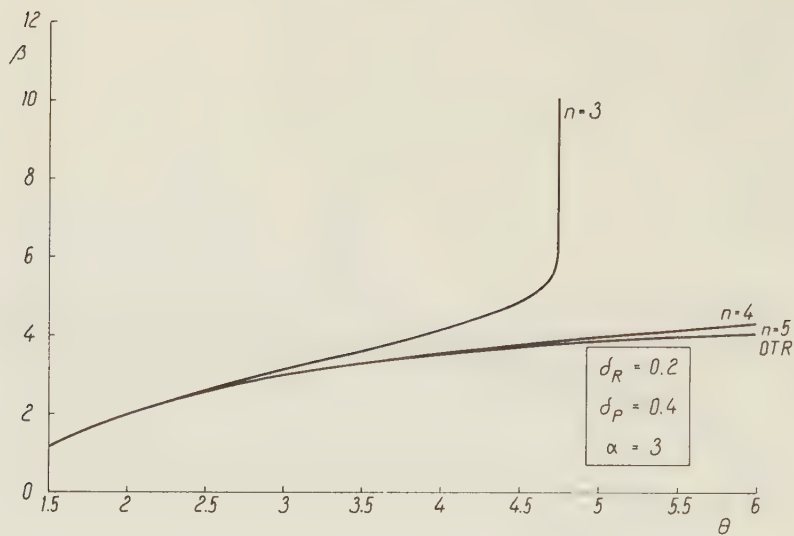


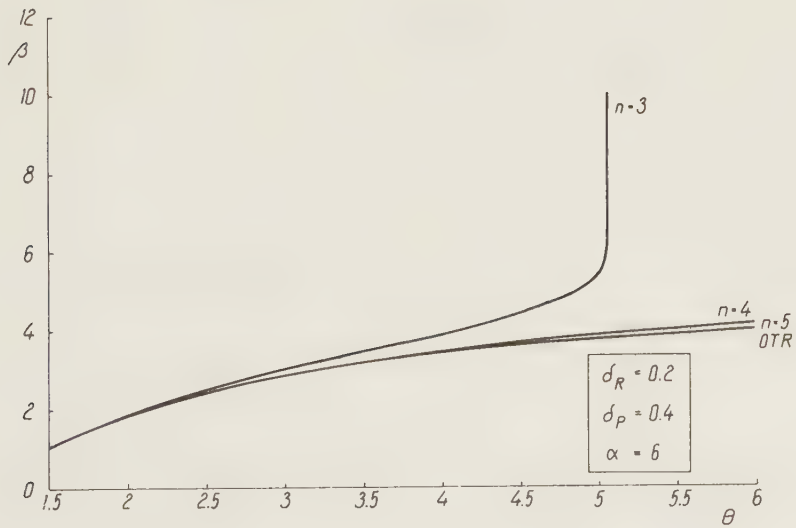
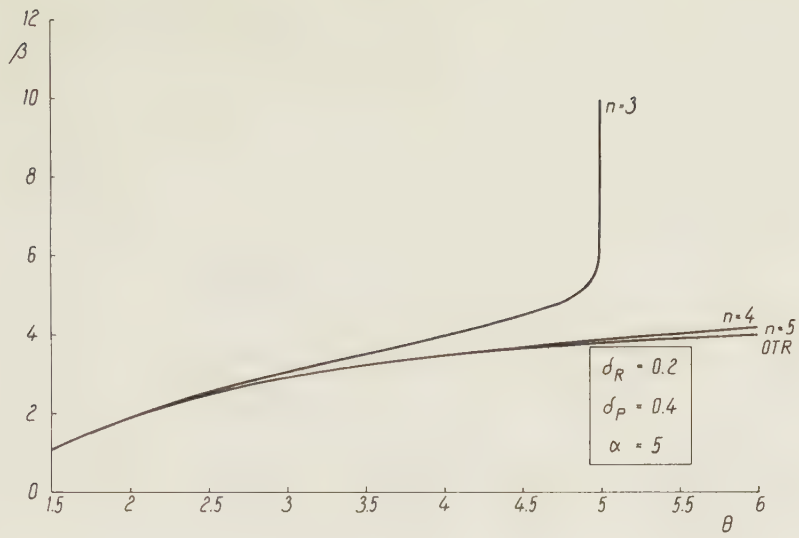












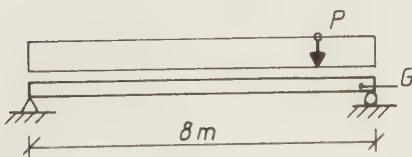
Beräkningsexempel på kalibrering

Beteckningar:

Egentyngd	G
Nyttolast	P
Medelvärde	betecknas med -
Index k	betecknas fraktilvärde
δ	variationskoefficient
σ	påkänning
μ	armeringsprocent
d	effektiv höjd
F_s	dragkraft i armeringen
*	betecknar dimensioneringsvärde
β	säkerhetsindex

Beräkning enligt SBN och B7Egentyngd $\bar{G} = 20 \text{ kN/m}$ Nyttolast $\bar{P} = \kappa \cdot \bar{G}$ $\kappa = 0.2, 1, 6$ $P_{kv} = \bar{P} (1 + k_v \delta_p)$ k_v motsvarar 80%-fraktil $P_{ke} = \bar{P} (1 + k_c \delta_p)$ k_c motsvarar 98%-fraktil $\delta_p = 0.40$ $\delta_G = 0.05$

Antagande om normalfördelning ger

 $k_v = 0.84$ $k_c = 2.05$ 

Rektangulärt tvärsnitt
bredd = 0.35 m

FIG G-1. Lastfall för exempel

Betongkonstruktioner

Armering Ks 40 Betong K250

$$1. \quad \alpha = 0.2$$

Vanligt bel. fall

$$S = G + P = 20 + 0.2 \cdot 20 \cdot (1 + 0.84 \cdot 0.4)$$

$$M = 202.75 \text{ kNm}$$

$$k_b = 74.5 \quad (\sigma_b = 8, \sigma_s = 220)$$

$$\mu = 0.64\%$$

$$d^2 = \frac{202.75 \cdot 600}{3.5 \cdot 74.5 \cdot 10} = 46.65 \text{ dm}^2$$

$$d = 0.68 \text{ m} \quad A_s = 15.3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Exc. bel. fall

$$S = 20 + 0.2 \cdot 20 \cdot (1 + 2.05 \cdot 0.4)$$

$$M = 218.24$$

$$\sigma_s = 1.2 \cdot 220 \quad \sigma_b = 1.2 \cdot 8 \quad \rightarrow k_b = 89$$

$$\mu = 0.64\%$$

$$d^2 = \frac{218.24 \cdot 600}{3.5 \cdot 89 \cdot 10} = 42.04 \text{ dm}^2$$

$$d = 0.65 \text{ m} \quad A_s = 14.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$2. \quad x = 1$$

Vanligt bel. fall

$$S = 20 + 20 \cdot 1.336 = 46.72 \text{ kN/m}$$

$$M = 373.76 \text{ kNm}$$

$$k_b = 74.5 \quad \rightarrow$$

$$d^2 = 86.0$$

$$d = 0.93 \text{ m} \quad A_s = 20.8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Exc. bel. fall

$$S = 20 + 20 \cdot 1.82 = 56.4 \text{ kN/m}$$

$$M = 451.2$$

$$k_b = 89 \quad \rightarrow$$

$$d^2 = 86.9$$

$$\mu = 0.64\%$$

$$d = 0.93 \text{ m} \quad A_s = 20.9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$3. \quad x = 6$$

Vanligt bel. fall

$$S = 20 + 120 \cdot 1.336 = 180.32 \text{ kN/m}$$

$$M = 1442.56 \text{ kNm}$$

$$k_b = 74.5 \quad \rightarrow$$

$$d^2 = 331.9$$

$$d = 1.82 \text{ m} \quad A_s = 40.8 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Exc. bel. fall

$$S = 20 + 120 \cdot 1.82 = 238.4 \text{ kN/m}$$

$$M = 1907.2 \text{ kNm}$$

$$k_b = 89 \rightarrow$$

$$d^2 = 367.4$$

$$\mu = 0.64\%$$

$$d = 1.92 \text{ m} \quad A_s = 42.9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

Beräkning enligt sannolikhetssteoretisk metod

Förutsättningar:

Alla bärförmågevariabler antas vara lognormalfördelade.

Alla lastvariabler antas vara normalfördelade.

$$g = F_s \cdot d \left(1 - \frac{\omega}{2}\right) - 8(G + P) \leq 0$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_s &= 458.8 \cdot A_s \text{ MN} \\ \sigma_{F_s} &= 34 \cdot A_s \text{ MN} \\ \bar{d} &= d_{\text{nom}} - 0.01 \text{ m} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Värden hämtade ur en delpopulation} \\ \text{framtagen av Svensk Byggstålkontroll} \end{array}$$

$$\delta_d = 0.05$$

$$\bar{G} = 20 \text{ kN/m}$$

$$\delta_G = 0.05$$

$$\bar{P} = \kappa \cdot \bar{G} \quad \kappa = 0.2, 1, 6$$

$$\delta_P = 0.40$$

Den mekaniska armeringsandelen ω har antagits vara en deterministisk storhet och satts till

$$\omega = \mu \cdot \frac{390 \cdot 1.5}{1.1 \cdot 18} = \mu \cdot 29.55$$

Betecknas ingående last- och bärförmågevariabler med X_v erhålles

$$x_v^* = \bar{x}_v + \alpha_v \beta \sigma_v$$

där

$$\alpha_v = \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x_v}\right)_{x_v^*}}{\sqrt{\sum \left(\frac{\partial g}{\partial x_v}\right)_{x_v^*}^2}} \cdot \sigma_v$$

om X_v är normalfördelad

$$x_v^* = \bar{x}_v e^{\beta \alpha_v \delta_v}$$

där

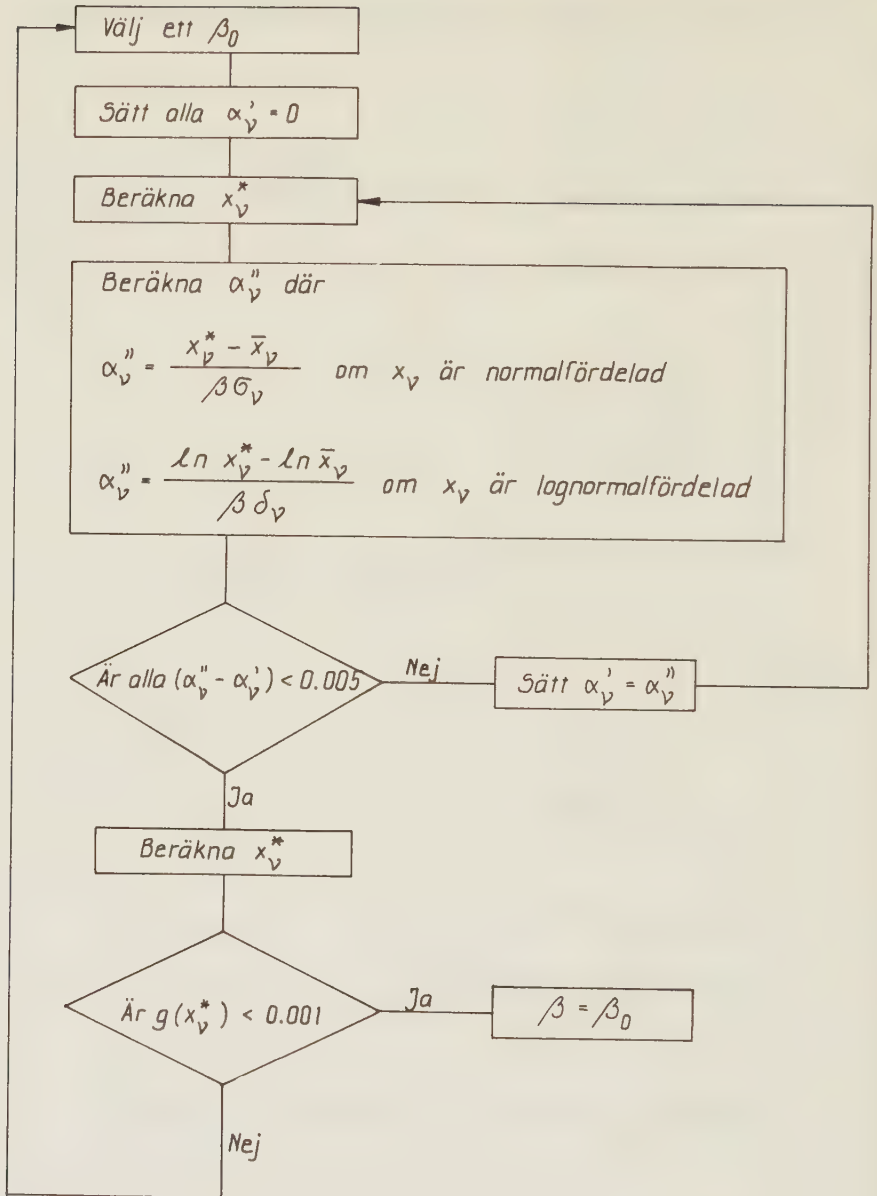
$$\alpha_v = - \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x_v}\right)_{x_v^*}}{\sqrt{\sum \left(\frac{\partial g}{\partial x_v}\right)_{x_v^*}^2}} \cdot x_v^* \cdot \delta_v$$

om X_v är lognormalfördelad

Dimensioneringskriteriet blir

$$g(x_v^*) = 0$$

Sammanställs ekvationerna i en beräkningsgång erhålls



Beräkningsresultaten redovisas nedan.

$$1. \quad x = 0.2$$

$$A_S = 15.3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\bar{F}_S = 458.8 \cdot A_S$$

$$\bar{d} = 0.67 \text{ m}$$

$$\bar{G} = 20 \text{ kN/m}$$

$$\bar{P} = 4 \text{ kN/m}$$

$$\omega = 0.189$$

$$\alpha_{F_S} = 0.689$$

$$\alpha_d = 0.465$$

$$\alpha_G = 0.295$$

$$\alpha_P = 0.472$$

$$F_S^* = 0.489 \text{ MN}$$

$$d^* = 0.568$$

$$G^* = 22.06 \text{ kN/m}$$

$$P^* = 9.285 \text{ kN/m}$$

$$\beta = 7.052$$

$$2. \quad x = 1$$

$$A_S = 20.9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\bar{F}_S = 458.8 \cdot A_S$$

$$\bar{d} = 0.92 \text{ m}$$

$$\bar{G} = 20 \text{ kN/m}$$

$$\bar{P} = 20 \text{ kN/m}$$

$$\omega = 0.189$$

$$\alpha_{F_S} = 0.524$$

$$\alpha_d = 0.354$$

$$\alpha_G = 0.096$$

$$\alpha_P = 0.769$$

$$F_S^* = 0.777 \text{ MN}$$

$$d^* = 0.836 \text{ m}$$

$$G^* = 20.51 \text{ kN/m}$$

$$P^* = 52.91 \text{ kN/m}$$

$$\beta = 5.374$$

$$3. \quad x = 6$$

$$A_S = 42.9 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$\bar{F}_S = 458.8 \cdot A_S$$

$$\bar{d} = 1.91 \text{ m}$$

$$\bar{G} = 20 \text{ kN/m}$$

$$\bar{P} = 120 \text{ kN/m}$$

$$\omega = 0.189$$

$$\alpha_{F_S} = 0.441$$

$$\alpha_d = 0.298$$

$$\alpha_G = 0.018$$

$$\alpha_P = 0.847$$

$$F_S^* = 1.776 \text{ MN}$$

$$d^* = 1.78$$

$$G^* = 20.09 \text{ kN/m}$$

$$P^* = 317.1 \text{ kN/m}$$

$$\beta = 4.86$$

Stålkonstruktioner

Med samma beteckningar och lastfall som för betongbalken räknas nu en stålbalk på samma sätt. Först görs en beräkning enligt St-BK N1. Stålkvalitet är 1312. Avgörande för bärförmågan antas vara maximalt böjmoment vilket blir detsamma som för betongbalken.

$$1. \quad \kappa = 0.2$$

$$M_{\max} = 202.75 \text{ kNm} \quad \text{vanligt lastfall}$$

$$M_{\max} = 218.24 \text{ kNm} \quad \text{exc. lastfall}$$

$$W_{\text{erf}} = 202.75 \cdot 10^{-3} / 147 = 1.38 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

för vanligt lastfall.

$$W_{\text{erf}} = 218.24 \cdot 10^{-3} / 147 / 1.15 = 1.29 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

för exc. lastfall.

$$2. \quad \kappa = 1$$

$$M_{\max} = 373.76 \text{ kNm} \quad \text{vanligt lastfall}$$

$$M_{\max} = 451.20 \text{ kNm} \quad \text{exc. lastfall}$$

$$W_{\text{erf}} = 2.54 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \quad \text{vanligt lastfall}$$

$$W_{\text{erf}} = 2.67 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \quad \text{exc. lastfall}$$

$$3. \quad \kappa = 6$$

$$M_{\max} = 1442.56 \text{ kNm} \quad \text{vanligt lastfall}$$

$$M_{\max} = 1907.20 \text{ kNm} \quad \text{exc. lastfall}$$

$$W_{\text{erf}} = 9.81 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \quad \text{vanligt lastfall}$$

$$W_{\text{erf}} = 1.13 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \quad \text{exc. lastfall}$$

Med samma beräkningsgång som tidigare följer nu en beräkning med statistisk metod. Härvid erfordras statistiska data för stålmaterialiet. Ur värden hämtade från SBI erhålles för stål 1312

$$\bar{f}_{St} = 271 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{f_{St}} = 0.106$$

Precis som tidigare antages bärförmågevariablerna vara lognormalfördelade och lastvariablerna vara normalfördelade.

Brottkriteriet blir

$$g = f_{St} \cdot W \cdot 1.10 - \beta (G + P) \leq 0$$

där faktorn 1.10 är formfaktorn för plastisk böjning.

Böjmotståndet W antas vara en stokastisk variabel, logaritmiskt normalfördelad, med

$$\bar{W} = W_{\text{erf.}} \quad \text{och} \quad \sigma_{\omega} = 0.05$$

Beräkning, enligt samma mönster som tidigare ger nu

$$1. \quad x = 0.2$$

$$\bar{f}_{st} = 271 \text{ MPa}$$

$$\bar{W} = 1.38 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\bar{G} = 20 \text{ kN/m}$$

$$\bar{P} = 4 \text{ kN/m}$$

$$\alpha_{f_{st}} = 0.791$$

$$\alpha_W = 0.373$$

$$\alpha_G = 0.256$$

$$\alpha_P = 0.410$$

$$f_{st}^* = 170.3 \text{ MPa}$$

$$W^* = 1.24 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$G^* = 21.41 \text{ kN/m}$$

$$P^* = 7.61 \text{ kN/m}$$

$$\beta = 5.53$$

$$2. \quad x = 1$$

$$\bar{f}_{st} = 271 \text{ MPa}$$

$$\bar{W} = 2.67 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\bar{G} = 20 \text{ kN/m}$$

$$\bar{P} = 20 \text{ kN/m}$$

$$\alpha_{f_{st}} = 0.633$$

$$\alpha_W = 0.299$$

$$\alpha_G = 0.089$$

$$\alpha_P = 0.701$$

$$f_{st}^* = 197.2 \text{ MPa}$$

$$W^* = 2.49 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$G^* = 20.42 \text{ kN/m}$$

$$P^* = 46.92 \text{ kN/m}$$

$$\beta = 4.74$$

$$3. \quad \kappa = 6$$

$$\bar{f}_{st} = 271 \text{ MPa}$$

$$\bar{W} = 1.13 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$$

$$\bar{G} = 20 \text{ kN/m}$$

$$\bar{P} = 120 \text{ kN/m}$$

$$\alpha_{f_{st}} = 0.544$$

$$\alpha_W = 0.256$$

$$\alpha_G = 0.017$$

$$\alpha_P = 0.799$$

$$f_{st}^* = 209.9 \text{ MPa}$$

$$W^* = 1.07 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$$

$$G^* = 20.07 \text{ kN/m}$$

$$P^* = 287.9 \text{ kN/m}$$

$$\beta = 4.40$$

